

Devoir de vacances de la Toussaint 2021

Terminale générale, spécialité mathématiques

Exercice 1 Calcul numérique

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

$$1. \quad A = 3 - \frac{5}{2} + \frac{7}{5} \quad B = 3 - \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 5} \quad C = 3 - \frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{5}} \quad D = 3 - \frac{1 + \frac{5}{2}}{1 - \frac{7}{5}}$$

$$2. \quad A = 3^5 \cdot 3^2 \cdot 3^4 \quad B = \frac{3^5 \cdot 3^2}{3^4} \quad C = 3^5 \cdot (3^2)^4 \quad D = 3^3 + 3^2$$

$$3. \quad A = 5\sqrt{18} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{8} \quad B = 2\sqrt{2}(5\sqrt{2} - 3) \quad C = (5\sqrt{2} - 3)(5\sqrt{2} + 3) \quad D = (5\sqrt{2} - 3)^2$$

$$4. \quad A = |7| + |-2| - |-3| \quad B = |7 - 2| + |7 - 8| \quad C = |7 - \sqrt{5}| + |\sqrt{5} - 9| \quad D = |7 - \sqrt{5}| \times |\sqrt{5} - 9|$$

Exercice 2 Calcul algébrique

1. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$$A = (3x - 2)(5x + 2) \quad B = (3x - 2)^2(5x + 2) \quad C = (2x^2 - 3)^2 \quad D = (\sqrt{2}x - 3\sqrt{2})^2$$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$$A = (3x - 2)(5x + 2) + (3x - 2)(6x - 4) \quad B = (3x - 2)(5x + 2) - (3x - 2)(6x - 4)$$

$$C = (3x - 2)^2 + (3x - 2)^2$$

3. Mettre au même dénominateur les expressions suivantes :

$$A = 3 + \frac{5}{x+2} \quad B = x + 3 + \frac{x-2}{x+2} \quad C = \frac{x+3}{x+2} - \frac{x+5}{x+6} \quad D = \frac{x+1}{x^2-4} + \frac{x+5}{x+2}$$

4. calculer $u_{n+1} - u_n$. Déterminer le signe de l'expression obtenue. n est un entier naturel.

$$u_n = 5n + 2 \quad u_n = n^2 - n + 7 \quad u_n = 5 - \frac{2}{n+4} \quad u_n = 5 + 2^n \quad u_n = 3 + \sqrt{2+n}$$

Exercice 3 récurrence

(u_n) est la suite numérique définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & u_n + 4n - 1 \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 2n^2 - 3n + 4$

Exercice 4 Fromage de brebis

Étienne, ingénieur en informatique depuis 20 ans, décide de changer de vie. En 2021, il se lance dans l'élevage de brebis. Il démarre avec 60 ovins. Son objectif est de produire du fromage. Chaque année, Étienne envoie à l'abattoir 25 % de son cheptel (les brebis les plus âgées et les moins productives) et conserve 40 agneaux femelles. En moyenne, une brebis produit 250 L de lait par an. Avec 1L de lait Étienne fabrique 150 g de fromage. Il vend le fromage au prix de 2 € les 100 g. Les charges de l'exploitation agricole s'élèvent en moyenne à 5 000 € par mois. Le salaire d'Étienne, lorsqu'il était ingénieur, s'élevait à 4 375 € par mois.

1. u_n Est le nombre de brebis de l'élevage de l'année 2021 + n . On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 160$

a) Justifier que la suite (u_n) est définie par
$$\begin{cases} u_0 & = & 60 \\ u_{n+1} & = & \frac{3}{4} \cdot u_n + 40 \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser le 1er terme et la raison.

c) Exprimer (v_n) en fonction de n .

d) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 160 - 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

2. On considère l'algorithme suivant :
- Recopier et compléter l'algorithme.
 - Donner la valeur affichée par cet algorithme.
 - Expliquer le rôle de cet algorithme.

```
1 u=60
2 n=0
3 while u<150:
4     n=.....
5     u=.....
6 print (2021+n)
```

3. Étienne retrouvera-t-il son salaire d'ingénieur ?

Si oui, en quelle année ?

4. Déterminer la limite de la suite (u_n)

En déduire le chiffre d'affaire de l'exploitation agricole à long terme.