ANNALES 2022

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 1h30

PUISSANCE ALPHA

concours post-bac

INSTRUCTIONS AUX CANDIDATS

L'usage de la calculatrice ou de tout appareil électronique est **interdit.**

L'épreuve comporte 16 exercices indépendants. Ces exercices sont répartis en 4 parties :

- Les fondamentaux : vous devez obligatoirement y répondre
- Mathématiques complémentaires
- Mathématiques spécialité de terminale
- Mathématiques expertes

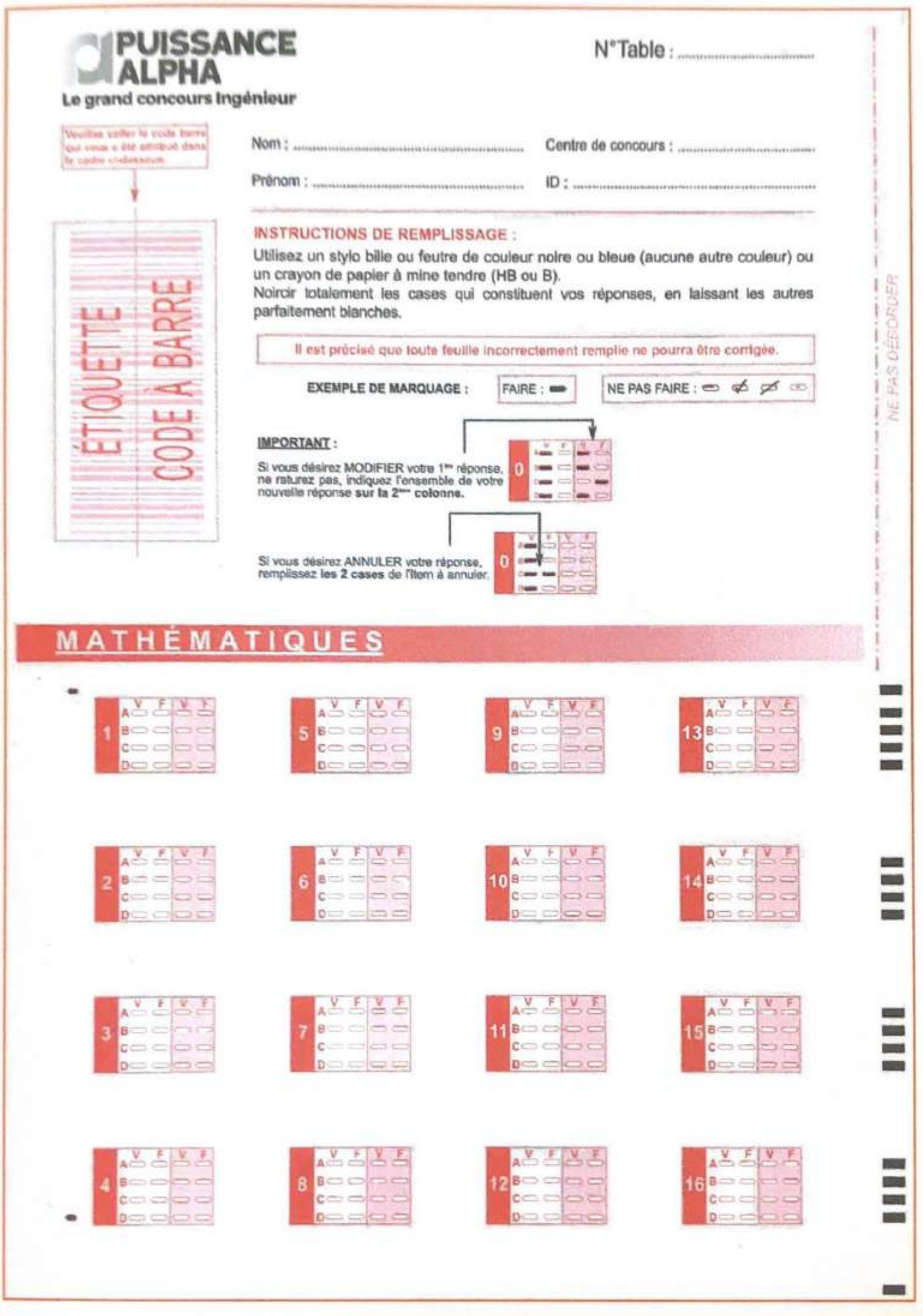
Vous devez traiter 8 exercices maximum **dont les 4 exercices fondamentaux** Si vous traitez plus de 4 exercices hors des fonda-mentaux, **seuls les 4 premiers** seront corrigés.
Un exercice comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c, d. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).
Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponse).
Toute réponse exacte rapporte un point.
Toute réponse inexacte entraîne le retrait de 0.5 point.
L'annulation d'une réponse ou l'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.
Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

Comment répondre au QCM :

Voici une grille de QCM type, comme indiqué dans les consignes en haut de celle-ci il est impératif de noircir complètement les cases avec un stylo afin qu'elles puissent être reconnues par le lecteur optique lors de la correction. **Il ne s'agit donc ni de cocher, ni d'entourer la bonne réponse**.

La colonne rouge à droite vous permet, si vous avez fait une erreur, de **modifier vos réponses**. Il ne faut en aucun cas raturer, barrer ou appliquer du correcteur sur votre réponse erronée mais **indiquer l'ensemble de votre nouvelle réponse** sur la colonne de droite.



PUISSANCE ALPHA
Le grand concours Ingénieur

N°Table :

Nom :
Centre de concours :
Prénom :
ID :

ETIQUETTE CODE A BARRE

INSTRUCTIONS DE REMPLISSAGE :
Utilisez un stylo bille ou feutre de couleur noire ou bleue (aucune autre couleur) ou un crayon de papier à mine tendre (HB ou B).
Noircir totalement les cases qui constituent vos réponses, en laissant les autres parfaitement blanches.

Il est précisé que toute feuille incorrectement remplie ne pourra être corrigée.

EXEMPLE DE MARQUAGE : FAIRE : NE PAS FAIRE :

IMPORTANT :
Si vous désirez MODIFIER votre 1re réponse, ne raturez pas, indiquez l'ensemble de votre nouvelle réponse sur la 2me colonne.

Si vous désirez ANNULER votre réponse, remplissez les 2 cases de l'item à annuler.

NE PAS DÉBORDER

MATHÉMATIQUES

EXERCICES FONDAMENTAUX : 4 EXERCICES

CES EXERCICES SONT OBLIGATOIRES

Exercice n° 1 : Bases du calcul

a) $(2x-1)^2 \times (4x+1) = 16x^3 + 4x^2 - 4x - 1$

b) $2 + \dfrac{4}{1 - \dfrac{3}{2 - \dfrac{5}{3}}} = \dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{0{,}14^2 \times 0{,}07^{-2} \times 10^{-4}}{0{,}2^3 \times 10^5} = 5 \times 10^{-7}$

d) $\dfrac{5}{\left(\sqrt{7}-1\right)^2} = \dfrac{5}{18}\sqrt{7} + \dfrac{10}{9}$

Exercice n° 2 : Bases de géométrie

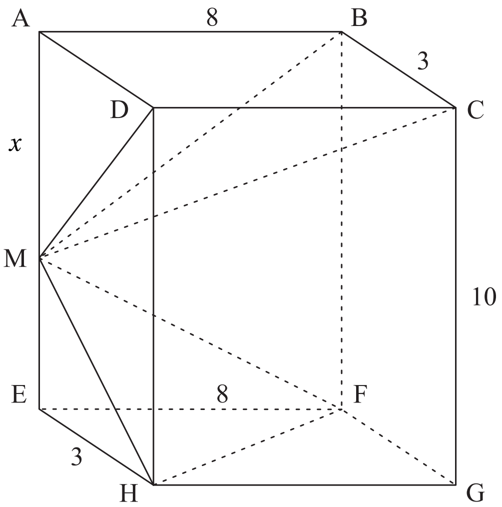


figure 1.

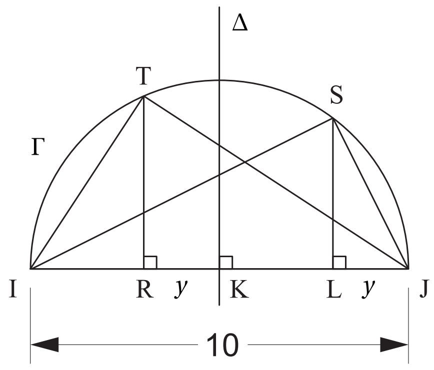


figure 2.

Sur la figure 1. :

- x est un nombre réel positif
- $ABCDEFGH$ est un pavé droit tel que $AB = 8,\ BC = 3$ et $BF = 10$
- M est un point du segment $[AE]$ tel que $AM = x$
- V_1 représente le volume de la pyramide $MABCD$
- V_2 représente le volume de la pyramide $MEHF$

a) $V_1 = V_2$ *si et seulement si* $AM = \dfrac{1}{3}AE.$

Sur la figure 2. :

- y est un nombre réel positif
- Γ représente un demi-cercle de diamètre le segment $[IJ]$ avec $IJ = 10$
- K est le milieu du segment $[IJ]$
- L est le point du segment $[KJ]$ et R le point du segment $[IK]$ tel que $LJ = KR = y$
- La perpendiculaire au segment $[IJ]$ passant par R coupe Γ en un point T
- La perpendiculaire au segment $[IJ]$ passant par L coupe Γ en un point S
- Δ représente la médiatrice du segment $[IJ]$
- S_1 représente l'aire du triangle ITJ
- S_2 représente l'aire du triangle ISJ

b) Si $y \neq 0$ *alors* $S_1 = S_2$ *.*

c) Si $y = \dfrac{5}{2}$ *alors l'aire du quadrilatère* $ITSJ$ *est égale à* $\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$

d) Les droites (TJ), (SI) *et* Δ *ne sont jamais concourantes.*

Exercice n° 3 : Polynômes et fonction rationnelle

a) L'équation $4x^2 - 3x + 1 = 0$ *admet deux solutions dans l'intervalle* $[-5\,;\,5]$.

b) $\dfrac{4x-1}{3x^2-1} \geqslant 0 \iff x \in \left]-\infty\,;\,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

c) La parabole Γ *d'équation* $y = -3x^2 - 4x + 1$ *admet le point* $S\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{7}{3}\right)$ *comme sommet.*

d) Soit $m \in \mathbb{R}^*$*. L'équation* $2mx^2 + (m-1)x - 5 = 0$ *admet deux solutions distinctes si et seulement si* $m \in \left]-\infty\,;\,-6\sqrt{10}-19\right[\cup \left]6\sqrt{10}-19\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,+\infty\right[$.

Exercice n° 4 : Dérivation

a) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-3}$ *admet comme dérivée la fonction* $f' : x \mapsto \dfrac{5}{(x-3)^2}$.

b) La courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto 4x^2 - 3x + 1$ *admet, au point d'abscisse* $x = -1$*, une tangente* Δ *d'équation* $\Delta : y = 11x - 3$.

c) La courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto -\dfrac{3}{x-2}$ *admet deux tangentes parallèles à la droite* Δ' *d'équation* $\Delta' : y = -5x + 1$.

d) La fonction $k : x \mapsto \dfrac{x-1}{2x+3}$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *.*

Vous devez choisir, librement, 4 exercices parmi la totalité des exercices des 3 sous parties suivantes, soit 4 exercices entre les exercices 5 et 16.

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES COMPLÉMENTAIRES : 4 EXERCICES

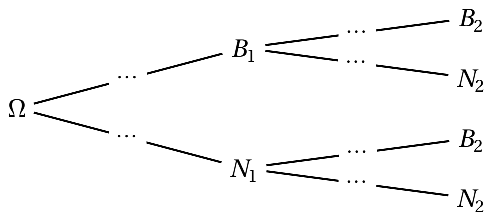
Exercice n° 5 : Probabilités

n est un entier naturel non nul.

Une urne contient n boules blanches et 5 boules noires. On effectue un tirage de deux boules sans remise.

On pose :

- B_1 (respectivement B_2) l'évènement : « on tire une boule blanche au 1er (respectivement 2e) tirage »
- N_1 (respectivement N_2) l'évènement : « on tire une boule noire au 1er (respectivement 2e) tirage »



A l'issue de cette épreuve, on compte le nombre de boules blanches obtenues :

- si le joueur obtient deux boules blanches, il gagne 10€
- si le joueur obtient deux boules noires, il gagne 5€
- si le joueur obtient deux boules de deux couleurs différentes, il perd 7€

Soit X_n la variable aléatoire qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur.

a) *La probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est égale à* $\dfrac{n^2-n+20}{(n+4)(n+5)}$

b) *La probabilité de l'évènement « la 1re boule est blanche, la 2e est noire » est égale à celle de l'évènement « la 1re boule est noire, la 2e est blanche » .*

c) *L'espérance de la variable aléatoire* X_n *est* $E(X_n)=\dfrac{n^2+9n+20}{(n+4)(n+5)}$

d) *Si le jeu est favorable alors* $n \geqslant 1$

Exercice n° 6 : Étude d'une fonction exponentielle.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+2-\dfrac{4\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

a) $f'(x)=3-\dfrac{8\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+2)^2}$

b) *La tangente à* $\mathscr{C}_f$ *au point d'abscisse* $x=\ln(2)$ *a pour équation* $y=\ln(2)$.

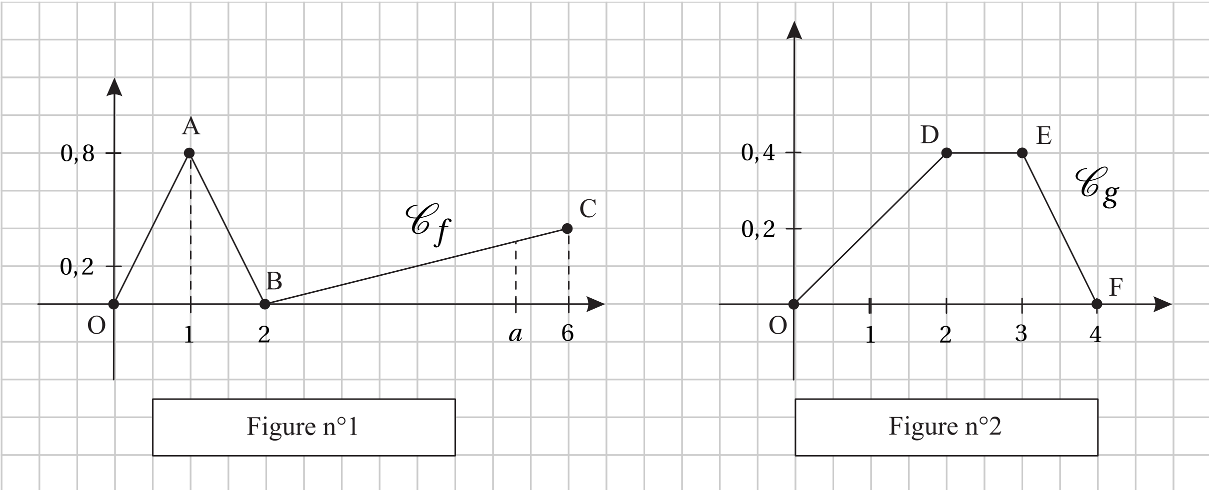
c) *L'équation* $f(x)=0$ *admet deux solutions sur* $\mathbb{R}$.

d) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 4ln\left(\frac{3}{e+2}\right)+\frac{5}{2}$

Exercice n° 7 : Lois à densité

Dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan, on pose :

- $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ et F les points ayant pour coordonnées respectives $A(1\,;\,0,8)$, $B(2\,;\,0)$, $C(6\,;\,0,4)$, $D(2\,;\,0,4)$, $E(3\,;\,0,4)$ et $F(4\,;\,0)$.
- f la fonction définie sur l'intervalle $I_1=[0\,;\,6]$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$, représentée à la Figure n°1.
- g la fonction définie sur l'intervalle $I_2=[0\,;\,4]$, de courbe représentative $\mathscr{C}_g$, représentée à la Figure n°2.



On admet que $A,\ B$ et C sont trois points de $\mathscr{C}_f$ et que $D,\ E$ et F sont trois points de $\mathscr{C}_g$.

a) La fonction g est une fonction densité de probabilité.

On pose :

- a un nombre réel de l'intervalle I_1.
- J_a l'intervalle $[0\,;\,a]$
- h la fonction définie sur J_a par $h(x)=f(x)$.

On admet que la fonction h est une fonction densité de probabilité sur l'intervalle J_a et on pose X la variable aléatoire continue associée à la densité h.

b) $a=4$

c) $P\left(\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant\frac{3}{2}\right)=0,7$

d) $P_{X\geqslant\frac{1}{2}}(X\leqslant 4)=1$

Exercice n° 8 : Systèmes

x et y sont deux nombres réels.

(δ) est la parabole d'équation $y+x^2+25=0$ et, pour tout nombre réel m, (Γ_m) est la droite d'équation $y-(m+1)x=0$.

$\mathscr{S}$ est le système $\begin{cases} y+x^2+25=0 \\ y-(m+1)x=0 \end{cases}$

a) (δ) *admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.*

b) (δ) *et* (Γ_9) *ont deux points d'intersection.*

c) Le système $\mathscr{S}$ *admet une unique solution si et seulement si* $m=-11$.

d) Si $m \in]-11\ ;\ 9[$ *alors le système* $\mathscr{S}$ *n'admet aucune solution.*

EXERCICES DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES : 6 EXERCICES

Exercice n° 9 : Petite étude de suite

Pour tout entier naturel n, on pose :

- (u_n) la suite de terme général $u_{n+1} = \mathrm{e}\sqrt{u_n}$ et de 1er terme $u_0 = 1$
- (v_n) la suite de terme général $v_n = \ln(u_n) - 2$
- (S_n) la suite de terme général $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

a) *La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.*

b) *Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{2^n}$.*

c) *Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2^{n-1}}}}$.*

d) *La suite (S_n) converge vers 2.*

Exercice n° 10 : Un peu de logique avec les suites

Pour tout entier naturel n, on pose (u_n) une suite géométrique de terme général u_n et de raison q un nombre réel.

a) *La suite (u_n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$.*

b) *Si la suite (u_n) est croissante alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.*

c) *La réciproque du b) est fausse.*

d) *La contraposée du b) est vraie.*

Exercice n° 11 : Quelques calculs de limites

a) *La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{2^n + 1}{1 - 2^n}$ diverge.*

b) *La suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ de terme général $v_n = \dfrac{n - 2\sin(n)}{1 - n^2}$ diverge.*

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{2x}} + 1 = 0$

d) $\lim\limits_{x \to \mathrm{e}} \left(\dfrac{\ln(x) - 1}{x - \mathrm{e}} \right) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Exercice n° 12 : Quelques calculs d'intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{7}{x+1}-1\right) dx = 7\ln(2)-1$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}\, dx = 0$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\times\cos(x)\, dx = \frac{3}{8}$

d) $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \frac{2}{x\ln(x)}\, dx = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Exercice n° 13 : Distance d'un point à un plan.

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,,\,\overrightarrow{k}\right)$, on donne les informations suivantes :

- $\mathscr{P}$ est un plan ayant pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ avec $a,\ b$ et c trois nombres réels tels que $(a;b;c)\neq(0;0;0)$.
- M est un point du plan $\mathscr{P}$ ayant pour coordonnées $(x;y;z)$
- A est un point de l'espace, n'appartenant pas au plan $\mathscr{P}$ et ayant pour coordonnées $(x_A;y_A;z_A)$.
- La perpendiculaire Δ au plan $\mathscr{P}$ passant par A coupe le plan $\mathscr{P}$ en un point H de coordonnées $(x_H;y_H;z_H)$ et vérifiant la relation :

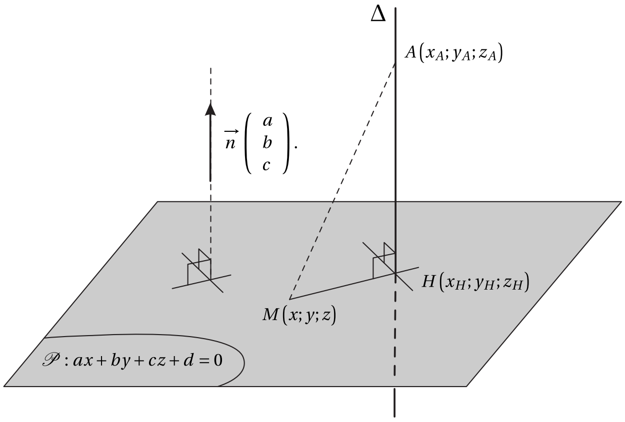
  $$ax_H+by_H+cz_H+d=0$$

  (on dit aussi que H est *le pied de la perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ passant par* A).
- $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ de coordonnées $(a;b;c)$ donc :

  $$\left|\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}\right| = AH\times\left\|\overrightarrow{n}\right\|$$

Définition :

On appelle **distance du point A au plan $\mathscr{P}$**, la plus petite distance AM avec M un point du plan $\mathscr{P}$. La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à la longueur AH.



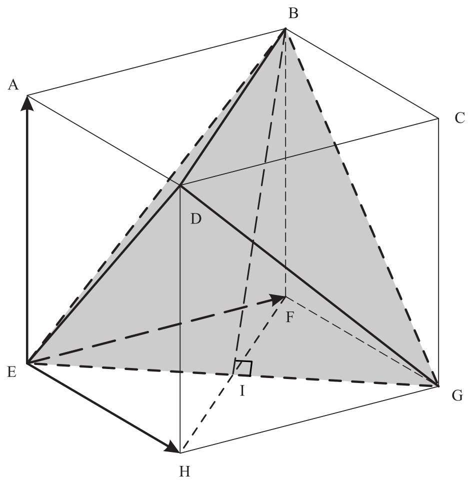
a) $\left|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}\right| = \left|-a\,x_A - b\,y_A - c\,z_A - d\right|$

b) La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à :

$$\frac{\left|a\,x_A + b\,y_A + c\,z_A + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Dans toute la suite, on admet que :

- $ABCDEFGH$ est un cube
- le segment $[AB]$ a pour longueur $AB = 1$
- I est le centre du carré $EFGH$



On se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(E\,;\,\overrightarrow{EH}\,,\,\overrightarrow{EF}\,,\,\overrightarrow{EA}\right)$.

c) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$ *est une équation cartésienne du plan (BEG)*

d) Le volume V du tétraèdre $DBGE$ est égal à $V = \frac{1}{3}$

Exercice n° 14 : Étude d'une fonction logarithme

Soit f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$ par :

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{(x-1)^2} \quad \text{et} \quad g(x)=-x-1-2x\ln(x)$$

a) $\mathscr{D}_f=\mathscr{D}_g=]0\ ;+\infty[$.

b) $g'(x)=-2\ln(x)-3$ *et* g *admet* $e^{-\frac{3}{2}}$ *comme maximum sur* $\mathscr{D}_g$.

c) $\mathscr{C}_f$ *admet une asymptote horizontale et deux asymptotes verticales.*

d) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(x-1)^3}$

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES EXPERTES : 2 EXERCICES

Exercice n° 15 : Notions de base sur les complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\right)$.

a) $\left(\sqrt{3}+i\right)^2=2+2\sqrt{3}\,i$

On considère les nombres complexes $z_1=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_2=1-\mathrm{i}$ et $Z=\dfrac{z_2^5}{(z_1)^4}$

b) $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}$

c) $cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ *et* $sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

d) $Z=\dfrac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{12}}$

Exercice n° 16 : Géométrie avec les nombres complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\right)$.

A, B, C et M sont les points du plan complexe d'affixes respectives $z_A=-1+\mathrm{i}$, $z_B=\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, $z_C=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}\mathrm{i}$ et $z=x+\mathrm{i}\,y$ avec x et y deux nombres réels.

Soit f l'application définie, pour tout nombre complexe $z\neq z_A$, par $f(z)=\dfrac{2z-\mathrm{i}}{z+1-\mathrm{i}}$

a) *La partie réelle de $f(z)$ est égale à Re$\left(f(z)\right)=\dfrac{2x^2+2x+2y^2-3y+1}{(x+1)^2+\left(y-1\right)^2}$ et la partie imaginaire de $f(z)$ est égale à Im$\left(f(z)\right)=\dfrac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$*

b) *L'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel est un cercle privé d'un point.*

c) *L'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur est une droite privée d'un point.*

d) *Le triangle ABC est rectangle et isocèle.*

ANNALES 2022

CORRIGÉS

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CORRIGÉS DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n°1 : Bases du calcul

Item a. **Réponse F**

$$(2x-1)^2\times(4x+1)=\left(4x^2-4x+1\right)\times(4x+1)=16x^3+4x^2-16x^2-4x+4x+1$$
$$=16x^3-12x^2+1.$$

Item b. **Réponse V**

$$2+\frac{4}{1-\frac{3}{2-\frac{5}{3}}}=2+\frac{4}{1-\frac{3}{\frac{6}{3}-\frac{5}{3}}}=2+\frac{4}{1-\frac{3}{\frac{1}{3}}}=2+\frac{4}{1-9}=2-\frac{4}{8}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Item c. **Réponse V**

$$\frac{0,14^2\times0,07^{-2}\times10^{-4}}{0,2^3\times10^5}=\frac{\left(2\times7\times10^{-2}\right)^2\times\left(7\times10^{-2}\right)^{-2}\times10^{-4}}{\left(2\times10^{-1}\right)^3\times10^5}=\frac{2^2\times7^2\times10^{-4}\times7^{-2}\times10^4\times10^{-4}}{2^3\times10^{-3}\times10^5}=\frac{10^{-4}}{2\times10^2}=0,5\times10^{-6}$$
$$=5\times10^{-7}.$$

Item d. **Réponse V**

$$\frac{5}{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}=\frac{5}{7+1-2\sqrt{7}}=\frac{5}{8-2\sqrt{7}}=\frac{5\left(8+2\sqrt{7}\right)}{\left(8-2\sqrt{7}\right)\times\left(8+2\sqrt{7}\right)}=\frac{40+10\sqrt{7}}{64-28}=\frac{40}{36}+\frac{10}{36}\sqrt{7}=\frac{10}{9}+\frac{5}{18}\sqrt{7}.$$

Exercice n°2 : Bases de géométrie

Item a. **Réponse V**

- $V_1=\frac{1}{3}\times Aire(ABCD)\times AM=\frac{x}{3}\times3\times8=8x$
- $V_2=\frac{1}{3}\times Aire(EHF)\times EM=\frac{10-x}{3}\times\frac{3\times8}{2}=4(10-x)=40-4x$

$$V_1=V_2\Leftrightarrow 8x=40-4x\Leftrightarrow 12x=40\Leftrightarrow x=\frac{40}{12}=\frac{10}{3}=\frac{1}{3}\times10\Leftrightarrow AM=\frac{1}{3}\times AE.$$

Item b. **Réponse F**

- On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle TRK rectangle en R:

$$TK^2=TR^2+RK^2\Leftrightarrow TR^2=25-y^2\Leftrightarrow TR=\sqrt{25-y^2}$$

- $S_1=Aire(ITJ)=\frac{IJ\times TR}{2}=5\times TR=5\times\sqrt{25-y^2}$
- On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KSL rectangle en L:

$$KS^2=SL^2+KL^2\Leftrightarrow SL^2=25-\left(5-y\right)^2=10y-y^2\Leftrightarrow SL=\sqrt{10y-y^2}$$

- $S_2 = Aire(ISJ) = \dfrac{IJ \times SL}{2} = 5\sqrt{10y - y^2}$
- $Si\ y = 1$ alors $S_1 \neq S_2$

Item c. **Réponse V**

Si $y = \dfrac{5}{2}$ alors L et R sont les milieux respectifs des segments [KJ] et [IK].
Dans ce cas, T et S sont symétriques par rapport à la droite Δ et les droites Δ et (TS) sont perpendiculaires.

Le quadrilatère ITSJ est un trapèze d'aire $S_3 = \dfrac{(TS + IJ) \times TR}{2} = \dfrac{(5+10) \times \sqrt{25 - \frac{25}{4}}}{2} = \dfrac{75\sqrt{3}}{4}$.

Item d. **Réponse F**

Si $y = \dfrac{5}{2}$ alors les droites (TJ) et (SI) sont symétriques par rapport à Δ.
Si on pose Ω le point d'intersection des droites (TJ) et Δ alors Ω est son propre symétrique dans la réflexion d'axe Δ donc $\Omega \in (SI)$.
Les droites (SI), (TJ) et Δ sont donc concourantes en Ω.

Exercice n°3 : Polynômes et fonction rationnelle

Item a. **Réponse F**

$\Delta = -7 < 0$ donc l'équation $4x^2 - 3x + 1 = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Item b. **Réponse F**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{4x-1}{3x^2-1}$.

- $f(x)$ existe si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{\sqrt{3}}{3} ; \dfrac{\sqrt{3}}{3} \right\}$
- Pour résoudre $f(x) \geqslant 0$, on rédige un tableau de signe $\cdots$
- $f(x) \geqslant 0 \iff x \in \left] -\dfrac{\sqrt{3}}{3} ; \dfrac{1}{4} \right] \cup \left] \dfrac{\sqrt{3}}{3} ; +\infty \right[$

Item c. **Réponse V**

- La courbe représentative de la fonction $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet le point $S\left(-\dfrac{b}{2a} ; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ comme sommet.
- $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{-6} = -\dfrac{2}{3}$
- $\Delta = b^2 - 4ac = 28$ donc $-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{28}{-12} = \dfrac{7}{3}$

Item d. **Réponse V**

- Soit $Q : x \mapsto 2mx^2 + (m-1)x - 5$ avec $m \in \mathbb{R}^*$
- $\Delta = b^2 - 4ac = (m-1)^2 - 4 \times (2m) \times (-5) = m^2 + 38m + 1$
- $Q(x) = 0$ admet deux solutions réelles si et seulement si $\Delta = m^2 + 38m + 1 > 0$
- $m^2 + 38m + 1 > 0 \iff \cdots \iff m \in \left]-\infty ; -6\sqrt{10} - 19\right[\cup \left]6\sqrt{10} - 19 ; 0\right[\cup \left]0 ; +\infty\right[$

Exercice n°4 : Dérivation

Item a. **Réponse F**

La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-3}$ est égale à $f' : x \mapsto -\dfrac{5}{(x-3)^2}$

Item b. **Réponse F**

- La dérivée de la fonction $g : x \mapsto 4x^2 - 3x + 1$ est la fonction $g' : x \mapsto 8x - 3$.
- L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $x = -1$ a pour équation :

$$y = g'(-1) \times (x+1) + g(-1) = \cdots = -11x - 3$$

Item c. **Réponse F**

- La dérivée de la fonction $h : x \mapsto -\dfrac{3}{x-2}$ est la fonction $h' : x \mapsto \dfrac{3}{(x-2)^2}$
- Le coéfficient directeur de la tangente (T_a) à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x = a$ est égale à $f'(a)$
- Les droites (T_a) et Δ' sont parallèles si et seulement si

$$f'(a) = -5 \iff \frac{3}{(a-2)^2} = -5 \iff \frac{5a^2 - 20a + 23}{(a-2)^2} = 0 \iff \begin{cases} 5a^2 - 20a + 23 = 0 \\ a \neq 2 \end{cases}$$

- $5x^2 - 20x + 23 = 0$ $\quad \Delta = -60$ $\quad$ l'équation n'admet aucune solution

Item d. **Réponse F**

La fonction k existe si et seulement si $x \neq -\dfrac{3}{2}$. On peut démontrer que la fonction k est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[$ et sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Exercice n°5 : Probabilités

Item a. **Réponse V**

La probabilité d'avoir deux boules de la même couleur est égale à :

$$p\left(B_1 \bigcap B_2\right) + p\left(N_1 \bigcap N_2\right) = \frac{n \times (n-1) + 20}{(n+4) \times (n+5)} = \frac{n^2 - n + 20}{(n+4)(n+5)}$$

Item b. **Réponse V**

- $p\left(B_1 \bigcap N_2\right) = \dfrac{n}{n+5} \times \dfrac{5}{n+4} = \dfrac{5n}{(n+4)(n+5)}$
- $p\left(N_1 \bigcap B_2\right) = \dfrac{5}{n+5} \times \dfrac{n}{n+4} = \dfrac{5n}{(n+4)(n+5)}$

Donc $p\left(B_1 \bigcap N_2\right)=p(N_1 \bigcap B_2)$

Item c. **Réponse F**

- $P(X_n=5)=p\left(N_1 \bigcap N_2\right)=\dfrac{20}{(n+4)(n+5)}$
- $p(X_n=-7)=p\left(B_1 \bigcap N_2\right)+p\left(N_1 \bigcap B_2\right)=\dfrac{10n}{(n+4)(n+5)}$
- $p(X_n=10)=p\left(B_1 \bigcap B_2\right)=\dfrac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)}$

Donc $E(X_n)=5\times\dfrac{20}{(n+4)(n+5)}-7\times\dfrac{10n}{(n+4)(n+5)}+10\times\dfrac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)}=\dfrac{10n^2-80n+100}{(n+4)(n+5)}$

Item d. **Réponse F**

$n\in\mathbb{N}^*$. Le jeu est favorable si et seulement si $E(X_n)\geq 0$ si et seulement si $10n^2-80n+100\geq 0$.

$\Delta=2400$, $n_1=4-\sqrt{6}>4-\sqrt{9}=4-3=1$ et $n_2=4+\sqrt{6}<4+\sqrt{9}=4+3=7$.

On fait un tableau de signe de $E(X_n)$ et on obtient $n=1$ ou $n\geq 7$.

Exercice n°6 : Étude d'une fonction exponentielle.

Item a. **Réponse F**

$$f'(x)=1-\frac{4e^x(e^x+2)-4e^x\times e^x}{(e^x+2)^2}=1-\frac{8e^x}{(e^x+2)^2}.$$

Item b. **Réponse V**

- $T_{\ln 2}\ :\ y=f'(\ln 2)\times(x-\ln 2)+f(\ln 2)$
- $f'(\ln 2)=1-\dfrac{8\times e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}+2)^2}=1-\dfrac{8\times 2}{16}=0$
- $f(\ln 2)=\ln 2+2-\dfrac{4\times e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}+2}=\ln 2+2-\dfrac{8}{4}=\ln 2$

Donc $T_{\ln 2}\ : y=\ln 2$

Item c. **Réponse F**

- $f'(x)=\dfrac{(e^x+2)^2-8e^x}{(e^x+2)^2}=\dfrac{e^{2x}+4e^x+4-8e^x}{(e^x+2)^2}=\dfrac{e^{2x}-4e^x+4}{(e^x+2)^2}=\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2\geq 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4e^x}{e^x+2}\right)=0$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
- $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4e^x}{e^x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4e^x}{e^x}\right)=4$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

On utilise le théorème de la bijection sur $\mathbb{R}$ et on démontre que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Item d. **Réponse V**

$$\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-4\ln(e^x+2)\right]_0^1=\left(\frac{1}{2}+2-4\ln(e+2)\right)-(-4\ln3)=\frac{5}{2}+4\ln3-4\ln(e+2)$$

$$=\frac{5}{2}+4\ln\left(\frac{3}{e+2}\right)$$

Exercice n°7 : Lois à densité

On pose $\Omega_1(0,5\,;0)$, $\Omega_2(0,5\,;0,4)$, $\Omega_3(1\,;0)$.

Item a. **Réponse V**

- ODEF est un trapèze d'aire $A_1=\dfrac{(4+1)\times0,4}{2}=5\times0,2=1$ unité d'aire
- La fonction g est continue, positive sur l'intervalle $I_2=[0\,;4]$ et $\int_0^4 g(x)\,dx=1$ donc la fonction g est une densité de probabilité sur l'intervalle I_2.

Item b. **Réponse V**

- $h(4)=f(4)=0,2$
- La fonction h est continue, positive sur l'intervalle $J_4=[0\,;4]$
- $\int_0^4 h(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^4 f(x)\,dx=\dfrac{2\times0,8}{2}+\dfrac{2\times0,2}{2}=0,8+0,2=1$
- La fonction h est une densité de probabilité sur l'intervalle J_4

Item c. **Réponse F**

Le trapèze $\Omega_1\Omega_2A\Omega_3$ a une aire $A_2=\dfrac{(0,4+0,8)\times0,5}{2}=0,6\times0,5=0,3$.

$$P\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2}\right)=2\times A_2=0,6.$$

Item d. **Réponse V**

$$P_{X\ge\frac{1}{2}}(X\le4)=\frac{P\left(\frac{1}{2}\le X\le4\right)}{P\left(X\ge\frac{1}{2}\right)}=\frac{P\left(\frac{1}{2}\le X\le4\right)}{P\left(\frac{1}{2}\le X\le4\right)}=1.$$

Exercice n°8 : Systèmes

Item a. **Réponse V**

(δ) : $y=-x^2-25$ est l'équation d'une parabole ayant la droite $x=-\dfrac{b}{2a}=0$ (et donc l'axe des ordonnées) comme axe de symétrie.

Item b. **Réponse F**

$M(x;y) \in (\delta)\bigcap(\Gamma_9)$ si et seulement si ses coordonnées sont solution du système $\left\{\begin{array}{rcl} y+x^2+25 & = & 0 \\ y-10x & = & 0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2+10x+25 & = & 0 \\ y & = & 10x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -5 \\ y & = & -50\end{array}\right. .$$

Donc (δ) et (Γ_9) ont un unique point d'intersection ayant pour coordonnées $(-5;-50)$.

Item c. **Réponse F**

$$\left\{\begin{array}{rcl} y+x^2+25 & = & 0 \\ y & = & (m+1)x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2+(m+1)x+25 & = & 0 \\ y & = & (m+1)x\end{array}\right. .$$

$$\Delta_m = b^2-4ac = (m+1)^2-100 = (m+1+10)\times(m+1-10) = (m-9)\times(m+11).$$

On fait le tableau de signe de Δ_m :

- Si $m \in \left]-\infty;-11\right[\bigcup \left]9;+\infty\right[$ alors le système admet deux solutions distinctes.
- Si $m \in \left]-11;9\right[$ alors le système n'admet aucune solution.
- Si $m \in \{-11;9\}$ alors le système admet une unique solution.

Item d. **Réponse V**

En reprenant les résultats obtenus à l'item c., si $m \in \left]-11;9\right[$ alors le système n'admet aucune solution.

Exercice n°9 : Petite étude de suite

Item a. **Réponse V**

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln\left(e\sqrt{u_n}\right) - 2 = \ln(e) + \frac{1}{2}\times\ln(u_n) - 2 = \frac{1}{2}\times\ln(u_n) - 1 = \frac{1}{2}\times(\ln(u_n) - 2)$$

$= \frac{1}{2}\times v_n$ avec $v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(1) - 2 = -2$.

Item b. **Réponse F**

$$v_n = v_0 \times q^n = -2\times\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Item c. **Réponse V**

$$v_n = \ln(u_n) - 2 \Leftrightarrow \ln(u_n) = v_n + 2 \Leftrightarrow u_n = e^{v_n+2} = e^2\times e^{v_n} = e^2\times e^{-\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{e^2}{e^{\frac{1}{2^{n-1}}}}.$$

Item d. **Réponse F**

$$S_n = v_0+v_1+\cdots+v_n = v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = (-2)\times\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = -4\times\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = -4$. La suite (S_n) converge vers -4.

Exercice n°10 : Un peu de logique avec les suites

Item a. **Réponse F**

Si $q=2$ et $u_0=-1$ alors $u_n=u_0\times q^n=-2^n$ et la suite (u_n) est strictement décroissante.

Item b. **Réponse F**

Si $q=\dfrac{1}{2}$ et $u_0=-1$ alors $u_n=u_0\times q^n=-\dfrac{1}{2^n}$. La suite (u_n) est une suite géométrique croissante mais

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2^n}\right)=0\,.$$

Item c. **Réponse F**

La réciproque du b) est :
" si $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors la suite (u_n) est croissante "
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $u_0>0$ et $q>1$. Dans ce cas, la suite (u_n) est bien croissante.

Item d. **Réponse F**

La contraposée du b) a la même valeur de vérité que le b) qui est faux.

Exercice n°11 : Quelques calculs de limites

Item a. **Réponse F**

$$u_n=\frac{2^n+1}{1-2^n}=\frac{2^n}{2^n}\times\frac{1+\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}-1}=\frac{1+\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}-1}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=-1$ et la suite (u_n) converge vers -1.

Item b. **Réponse F**

Pour tout entier naturel $n\geq 2$, $-1\leq \sin(n)\leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{n+2}{1-n^2}\leq v_n=\dfrac{n-2\sin(n)}{1-n^2}\leq\dfrac{n-2}{1-n^2}$
Or $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n-2}{1-n^2}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n+2}{1-n^2}=0$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$ et la suite (v_n) converge vers 0.

Item c. **Réponse F**

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^{2x}}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{e^{2x}}+1\right)=1$

Item d. **Réponse V**

Soit f la fonction définie par $f: x\mapsto \ln(x)$. f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.
Pour tout $a>0$, $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$
$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ d'où $\lim_{x\to e}\dfrac{\ln(x)-\ln(e)}{x-e}=f'(e)=\dfrac{1}{e}$.

Exercice n°12 : Quelques calculs d'intégrales.

Item a. **Réponse V**

$$\int_0^1 \left(\frac{7}{x+1}-1\right)dx=[7\times\ln|x+1|-x]_0^1=(7\ln(2)-1)-(7\ln(1)-0)=7\ln(2)-1.$$

Item b. **Réponse V**

$$\int_{-1}^1 \frac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}dx=\frac{3}{8}\times\int_{-1}^1 \frac{8x}{\sqrt{4x^2+1}}dx=\frac{3}{8}\times\left[2\sqrt{4x^2+1}\right]_{-1}^1=\frac{3}{8}\times\left(2\sqrt{5}-2\sqrt{5}\right)=0.$$

Remarque : la fonction $f:x\mapsto\dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}$ *est impaire et on calcule son intégrale sur l'intervalle* $[-1;1]$ *centré en 0 donc* $\int_{-1}^1 f(x)\,dx=0$.

Item c. **Réponse V**

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(x)\times\cos(x)\,dx=\frac{1}{2}\times\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(2x)\,dx=\frac{1}{2}\times\left[-\frac{1}{2}\times\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{4}\times\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos(0)\right)=-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}-1\right)=\frac{3}{8}$$

Item d. **Réponse V**

$$\int_{e^2}^{e^3}\frac{2}{x\times\ln(x)}dx=2\times\int_{e^2}^{e^3}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}dx=2\times[\ln|\ln(x)|]_{e^2}^{e^3}=2\times\left(\ln\left(\ln\left(e^3\right)\right)-\ln\left(\ln\left(e^2\right)\right)\right)=2\times(\ln 3-\ln 2)=2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Exercice n°13 : Distance d'un point à un plan.

Item a. **Réponse V**

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on a :

- $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_H-x_A\\y_H-y_A\\z_H-z_A\end{pmatrix}$ avec $a\,x_H+b\,y_H+c\,z_H+d=0\Leftrightarrow a\,x_H+b\,y_H+c\,z_H=-d$
- $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}\right|&=\left|a(x_H-x_A)+b\left(y_H-y_A\right)+c(z_H-z_A)\right|=\cdots=\left|-a\,x_A-b\,y_A-c\,z_A-d\right|\\&=\left|a\,x_A+b\,y_A+c\,z_A+d\right|\end{aligned}$$

Item b. **Réponse V**

$\left|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}\right|=AH\times\|\vec{n}\|=AH\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ donc $AH=\dfrac{\left|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{\left|a\,x_A+b\,y_A+c\,z_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Item c. **Réponse V**

Dans le repère $(E;\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EA})$, on a :

- $E(0;0;0)$, $B(0;1;1)$ et $G(1;1;0)$
- On remarque que les coordonnées des points E, B et G vérifient l'équation $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0$

Donc le plan (EBG) admet une équation cartésienne :

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0 \Leftrightarrow x-y+z=0$$

Item d. **Réponse V**

- Dans le triangle BIG rectangle en I on a, d'après le théorème de Pythagore, $IB^2=BG^2-IG^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ donc $BI=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$
- L'aire Γ du triangle BEG est égale à

$$\Gamma=\frac{EG\times BI}{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Soit Ω le pied de la hauteur issue de D du tétraèdre DBGE.

$$D\Omega=\frac{|x_D-y_D+z_D|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

- Le volume V du tétraèdre DBGE est égal à :

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

Exercice n°14 : Étude d'une fonction logarithme

Item a. **Réponse F**

$f(x)$ existe si et seulement si $\left\{\begin{array}{ccc} x & > & 0 \\ x & \neq & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\,]0;1[\bigcup]1;+\infty[$ et $g(x)$ existe si et seulement si $x>0$.

Item b. **Réponse F**

- $g'(x)=-1-\left(2\ln x+2x\times\frac{1}{x}\right)=-1-2\ln x-2=-3-2\ln x$
- $g'(x)>0\Leftrightarrow -3-2\ln x>0\Leftrightarrow 2\ln x<-3\Leftrightarrow \ln x<-\frac{3}{2}\Leftrightarrow 0<x<e^{-\frac{3}{2}}$
- g est strictement croissante sur $\left]0;e^{-\frac{3}{2}}\right]$ et g est strictement décroissante sur $\left[e^{-\frac{3}{2}};+\infty\right[$

g admet un maximum en $x=e^{-\frac{3}{2}}$ à ne pas confondre avec $e^{-\frac{3}{2}}$ est un maximum pour g (on prendra le temps de vérifier que $g\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)\neq e^{-\frac{3}{2}}$).

Item c. **Réponse V**

- $f(x)=\frac{1+\ln x}{x-1}\times\frac{1}{x-1}=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\ln(x)}{x}\times\frac{x}{x-1}\right)\times\frac{1}{x-1}$.
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1$ donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

Donc C_f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

$\lim_{x\to0}(x-1)^2=1$ et $\lim_{x\to0}(1+\ln x)=-\infty$ donc $\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$ et C_f admet la droite d'équation $x=0$ comme asymptote verticale.

$\lim_{x\to1}(1+\ln x)=1$ et $\lim_{x\to1}(x-1)^2=0^+$ donc $\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$ et C_f admet la droite d'équation $x=1$ comme asymptote verticale.

Item d. **Réponse V**

$x\neq1$ donc

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times(x-1)^2-(1+\ln x)\times2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\times\frac{1}{x}-2(1+\ln x)}{(x-1)^3}=\frac{x-1-2x(1+\ln x)}{x(x-1)^3}=\frac{-x-1-2x\ln x}{x(x-1)^3}=\frac{g(x)}{x(x-1)^3}$$

Exercice n°15 : Notions de base sur les complexes

Item a. **Réponse V**

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^2=2+2\sqrt{3}\,i.$$

Item b. **Réponse V**

- $z_1=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{\frac{i\pi}{3}}$
- $z_2=1-i=\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\,e^{-\frac{i\pi}{4}}$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}}=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}$$

Item c. **Réponse V**

- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(1+i)}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
- $\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\,sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sqrt{2}\,sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Item d. **Réponse V**

$$Z=\frac{z_2^5}{(\overline{z_1})^4}=\frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^5}{\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4}=\frac{4\sqrt{2}e^{-\frac{5i\pi}{4}}}{4^2e^{-\frac{4i\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{i\pi}{12}}$$

Exercice n°16 : Géométrie avec les nombres complexes

Item a. **Réponse V**

$$f(z)=\frac{2(x+iy)-i}{(x+iy)+1-i}=\frac{2x+i(2y-1)}{(x+1)+i(y-1)}=\frac{(2x+i(2y-1))((x+1)-i(y-1))}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$=\cdots=\frac{2x^2+2x+(y-1)(2y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}+i\frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$Re(f(z))=\frac{2x^2+2x+(y-1)(2y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}=\frac{2x^2+2x+2y^2-3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2} \quad \text{et} \quad Im(f(z))=\frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

Item b. **Réponse F**

$f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Im(f(z))=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-1 & = & 0\\ (x;y) & \neq & (-1;1)\end{cases}$. Or $A(-1;1)$ est un point de la droite $\Delta : x+2y-1=0$. Donc l'ensemble des point $M(z)$ tels que $f(z)\in\mathbb{R}$ est la droite Δ privée du point A.

Item c. **Réponse F**

$f(z)$ imaginaire pur si et seulement si $Re(f(z))=0\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+2x+2y^2-3y+1 & = & 0\\ (x;y) & \neq & (-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x^2+x+y^2-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} & = & 0\\ (x;y) & \neq & (-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2 & = & \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2\\ (x;y) & \neq & (-1;1)\end{cases}$

L'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{5}}{4}$ privé du point A.

Item d. **Réponse V**

- $AB=|z_B-z_A|=\left|1-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$
- $AC=|z_C-z_A|=\left|\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i\right|=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$
- $BC=|z_C-z_B|=\left|-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i\right|=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$

On a $AC=BC$ et $AC^2+BC^2=2\times\frac{10}{16}=\frac{5}{4}=AB^2$ donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.

Les pièges et écueils à éviter :

Dans le sujet de concours Puissance Alpha, il est important d'être à l'aise avec les bases du programme :

- les bases du calcul
- les formules sur les aires et volumes
- les identités remarquables
- les outils du second degré
- factoriser et développer rapidement
- résoudre rapidement une équation
- rédiger rapidement un tableau de signe et résoudre une inéquation
- les calculs de dérivées
- étudier rapidement un sens de variation
- les techniques de calculs de limites
- les techniques de calculs des intégrales
- les bases du langage Python

Maîtriser parfaitement tous les théorèmes étudiés au collège et au lycée et ne pas hésiter à prendre le temps de bien lire l'énoncé.