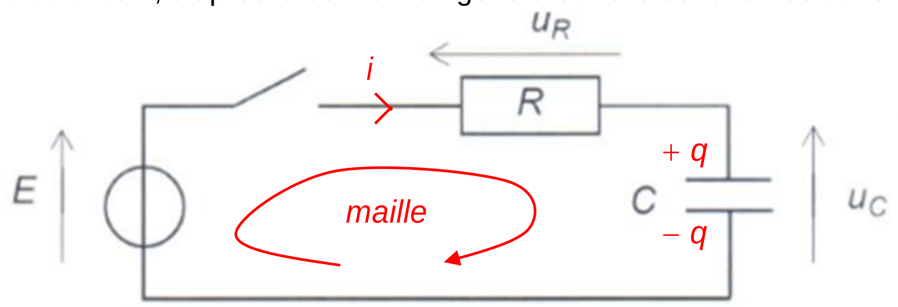
Étude théorique de la charge d'un dipôle RC

1. D'après la loi des mailles : $E - u_R - u_C = 0$ ou $u_R + u_C = E$

2. On flèche l'intensité sur le schéma du circuit ; d'après la convention générateur elle est orientée dans le sens de la flèche de tension E.



D'après la loi d'Ohm : $u_R = R.i$

3. La charge portée par l'armature positive du condensateur vérifie : $q = C.u_C$.

L'intensité du courant étant un débit de charges électrique : $i = \dfrac{dq}{dt}$.

Ainsi : $i = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d(C.u_C)}{dt} = C.\dfrac{du_C}{dt}$ car C est une constante.

4. D'après les questions précédentes **:** $E - u_R - u_C = 0 \Leftrightarrow u_R + u_C = E$

Or $u_R = R.i$ et $i = C.\dfrac{du_C}{dt}$ donc $u_R = R.C.\dfrac{du_C}{dt}$

Ainsi, $u_R + u_C = E$ devient $R.C.\dfrac{du_C}{dt} + u_C = E$

En divisant chaque terme par $R.C$: $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{E}{RC}$

5. Vérifions que $u_C = E \times (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ est solution de l'équation différentielle précédente.

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{d\left(E \times (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\right)}{dt} = E \times \frac{d(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}{dt} = E \times \left(0 - \left(-\frac{1}{RC}\right) \times e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \frac{E}{RC} \times e^{-\frac{t}{RC}}$$

Injectons les expressions de u_C et $\dfrac{du_C}{dt}$ dans l'équation différentielle $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{E}{RC}$:

$$\frac{E}{RC} \times e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{E \times (1 - e^{-\frac{t}{RC}})}{RC} = \frac{E}{RC} \Leftrightarrow \frac{E}{RC} = \frac{E}{RC} \quad \text{CQFD}$$

Autre méthode :

On écrit l'équation différentielle sous la forme $y' = a.y + b$ qui admet des solutions de la forme $y = K.e^{a.x} - \dfrac{b}{a}$.

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{R.C}.u_C + \frac{E}{R.C}$$

Par analogie, $a = -\dfrac{1}{R.C}$ et $b = \dfrac{E}{R.C}$

ainsi les solutions sont de la forme $u_C(t) = K \times e^{-\frac{t}{R.C}} - \dfrac{\frac{E}{R.C}}{-\frac{1}{R.C}} = K \times e^{-\frac{t}{R.C}} + E$.

En tenant compte des conditions initiales, on peut trouver l'unique solution.

$u_C(t=0) = 0$

$$K \times e^{-\frac{0}{R.C}} + E = 0$$

$K + E = 0$ donc $K = -E$

$$u_c = -E \times e^{-\frac{t}{R.C}} + E$$

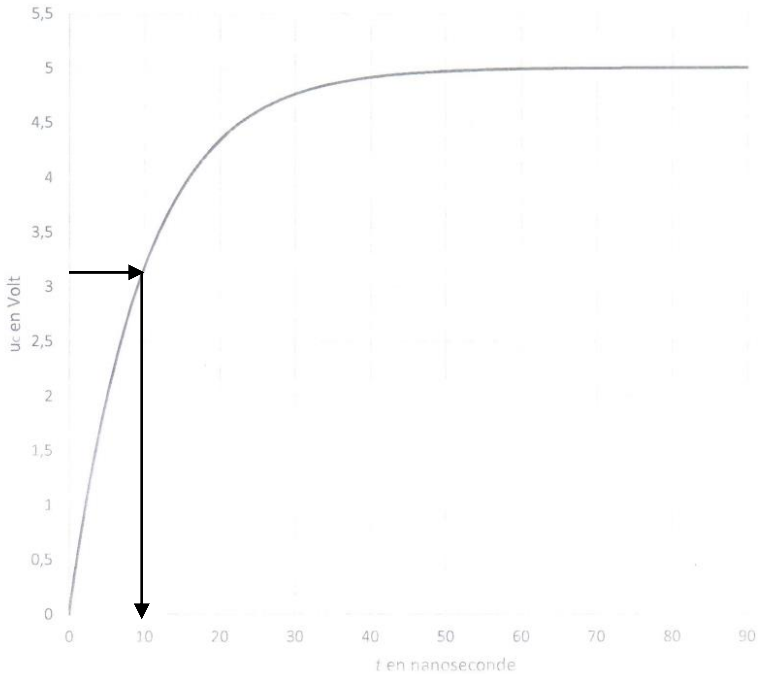
Finalement on retrouve la solution proposée : $u_c = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{R.C}}\right)$

Étude expérimentale de la charge d'un dipôle RC.

6. Le temps caractéristique τ correspond à la durée nécessaire pour que la tension u_C atteigne 63 % de sa valeur finale soit $0{,}63\times5{,}0 = 3{,}15$ V.

Graphiquement, on obtient $\tau = 9{,}0$ ns.

Astuce : on mesure à la règle la longueur correspondant à 5,0 V sur l'axe vertical puis on multiplie cette longueur par 0,63 pour placer 3,15 V.



7. $\tau = R.C$

8. $\tau = R \times C \Leftrightarrow C = \frac{\tau}{R}$

$C = \frac{9{,}0\times10^{-9}}{330} = 2{,}7\times10^{-11}$ F = 27×10^{-12} F, soit 27 pF.

Remarque : cette valeur est faible mais correspond aux valeurs usuelles des capacités des condensateurs (du pF à quelque mF).

Étude d'un condensateur à capacité variable

9. $C = \frac{\varepsilon \times S}{d} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{C \times d}{S}$ avec C en F, d en m et S en m^2 donc ε en $\frac{F \times m}{m^2}$ soit F.m^{-1}.

10. Si on rapproche l'armature mobile, d diminue. Or d est **au dénominateur** dans la relation $C = \frac{\varepsilon \times S}{d}$ donc la capacité C du condensateur augmente.

Réalisation d'un capteur de position

11. $C = \frac{\varepsilon \times S}{d} \Leftrightarrow d = \frac{\varepsilon \times S}{C}$

La permittivité ε est connue ; si on admet que la surface S des plaques est connue (ou facile à mesurer), l'étude de la charge du dipôle RC constitué permet de trouver la valeur de la capacité C (comme à la question **8.** en admettant la valeur de R connue).

Ainsi, on peut en déduire l'épaisseur d de colle $d = \frac{\varepsilon \times S}{C}$.