Baccalauréat 2022 - Spécialité Maths
Correction Métropole
Sujet 1 - 11 mai 2022

Math93.com

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque

Dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

Le sujet comporte 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Exercice 1. Thèmes : fonction exponentielle, suites — 7 points

Dans le cadre d'un essai clinique, on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie. L'objectif decet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient. On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(t) = 3t\,\mathrm{e}^{-0,5t+1}$, où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1.

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout nombre réel t

$$f'(t) = 3(-0,5t+1)\,\mathrm{e}^{-0,5t+1}$$

Corrigé

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} [0\ ;\ 10] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 3t \times \mathrm{e}^{-0,5t+1} \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ 10]$.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\ ;\ 10]\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = 3t & ; & u'(x) = 3 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-0,5t+1} & ; & v'(x) = \left(-0,5\,\mathrm{e}^{-0,5t+1}\right) \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0\ ;\ 10],\quad f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)\\ f'(x) &= 3 \times \mathrm{e}^{-0,5t+1} + 3t \times \left(-0,5\,\mathrm{e}^{-0,5t+1}\right)\\ f'(x) &= 3\,\mathrm{e}^{-0,5t+1} + 3 \times \left(-0,5t\,\mathrm{e}^{-0,5t+1}\right)\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 10]\ ;\ f'(x) = 3(-0,5t+1)\,\mathrm{e}^{-0,5t+1}}$$

1. b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

Corrigé

- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, a fortiori sur $[0\ ;\ 10]$. f' est donc du signe du facteur $(-0,5t+1)$.
- Par ailleurs sur $[0\ ;\ 10]$ on a :

$$\begin{cases}(-0,5t+1) = 0 \iff t = 2\\ (-0,5t+1) > 0 \iff 0 \leqslant t < 2\end{cases} \implies (-0,5t+1) < 0 \iff 2 < t \leqslant 10$$

Soit puisque $f(t) = 3t\,\mathrm{e}^{-0,5t+1}$:

$$f(0) = 0\ ;\ f(2) = 6 \text{ et } f(10) = 30\,\mathrm{e}^{-4}$$

t	0		2		10
Signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	$30\,\mathrm{e}^{-4}$

1. c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité maximale ?

Corrigé

Selon cette modélisation, la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera maximale pou $t = 2$ heures et cette quantité maximale sera de $f(2) = 6$ mg.

2.

2. a. Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle [0 ; 2], notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Corrigé

t	0	α	2		10
Signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0 ↗	5 ↗	6	↘	$30\,\mathrm{e}^{-4}$

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)
Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$;
- Le réel $k = 5$ est compris entre $f(0) = 0$ et $f(2) = 6$
- Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
  l'équation $f(x) = 5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.

Valeur approchée .
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(1,02) & \approx & 4,99 < 5 \\ f(1,03) & \approx & 5,02 > 5 \end{array}\right|, \quad \text{donc } 1,02 < \alpha < 1,03.$$

Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\underline{\alpha \approx 1,02}$.

On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle [2 ; 10], notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

2. b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg. Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Corrigé

On a donc :

t	0	$\alpha \approx 1.02$	2	$\beta \approx 3,46$	10
Signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0 ↗	5 ↗	6 ↘	5 ↘	$30\,\mathrm{e}^{-4}$

Avec les valeurs approchées, on a bien

$$\begin{cases} f(1,03) \approx 5,02 > 5 & \text{On choisit la v.a. par excès)} \\ f(3,46) \approx 5,002 > 5 & \text{On choisit la v.a. par défaut)} \end{cases}$$

On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg. A la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole est donc :

$$3,46 \text{ h} - 1,03 \text{ h} = 2,43 \text{ h} = 2 \text{ h}25 \text{ min } 48 \text{ s} \approx \underline{2 \text{ h}25 \text{ min}}$$

Partie B : Etude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg. On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé. On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30% par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ème heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

Corrigé

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30% par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection donc il en reste 70% et on ajoute 1,8 mg.

Selon cette modélisation, la quantité u_1 de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure est donc de :

$$u_1 = 0,7u_0 + 1,8 = \underline{3,2 \text{ mg}}$$

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

Corrigé

Soit n entier.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30% par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection donc il en reste 70% de u_n et on ajoute 1,8 mg.

Selon cette modélisation, la quantité u_{n+1} de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la $(n+1)$-ème heure est donc de :

$$u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$$

3.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

Corrigé

Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 0$ la propriété

$$P(n) \ : \ u_n \leqslant u_{n+1} < 6$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque : $u_0 = 2 \leqslant u_1 = 3,2 < 6$
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

  Remarque

On admet que :	Et on cherche à montrer que :
$u_n \leqslant u_{n+1} < 6$	$\boxed{u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6}$ à prouver

  On applique l'hypothèse de récurrence qui implique que $P(n)$ soit vérifiée et donc que $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

  $$u_n \leqslant u_{n+1} < 6$$

  On multiplie chaque terme par 0,7 et on ajoute 1,8

  $$\begin{aligned} u_n \times 0,7 + 1,8 \leqslant u_{n+1} \times 0,7 + 1,8 < 6 \times 0,7 + 1,8 = 6 \\ u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6 \end{aligned}$$

  On a alors montré que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$ et donc que $P(n+1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion**
  On a montré que $P(0)$ est vraie. De plus, la propriété est héréditaire. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

  $$\boxed{u_n \leqslant u_{n+1} < 6}$$

3. b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Corrigé

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$ donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 6, elle est donc convergente vers $\ell \leqslant 6$.

3. c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

- Soit h la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 0,7x + 1,8$.
- Pour tout entier n on a $u_{n+1} = h(u_n)$ et h continue sur $\mathbb{R}$.
- Puisque la suite (u_n) est convergente vers ℓ, on sait alors que ℓ est solution de l'équation $h(x) = x$, soit :

$$\begin{aligned} h(x) = x &\iff 0,7x + 1,8 = x \\ &\iff 1,8 = 0,3x \\ &\iff x = \frac{1,8}{0,3} = 6 \end{aligned}$$

- Interprétation : Donc la valeur de $\ell = 6$. la quantité de médicament présente dans le sens va tendre vers 6 mg.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

4. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

Corrigé

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = 0.7 \times u_n + 1{,}8 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = -u_n + 6 \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$ on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -u_{n+1} + 6 \\ v_{n+1} &= -\left(0{,}7\, u_n + 1{,}8\right) + 6 \\ v_{n+1} &= -0{,}7 \times u_n + 4{,}2 \\ v_{n+1} &= 0{,}7 \times \left(-u_n + \frac{4{,}2}{0{,}7}\right) \\ v_{n+1} &= 0{,}7 \times (-u_n + 6) \\ v_{n+1} &= 0{,}7 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}7$, et de premier terme $v_0 = 4$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= -u_0 + 6 \\ v_0 &= -2 + 6 \\ v_0 &= 4 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 4 \\ v_{n+1} & = 0{,}7 \times v_n \end{cases} \; ; \; \forall n \geqslant 0}$$

4. b. Déterminer l'expression de (v_n) en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Corrigé

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}7$, et de premier terme $v_0 = 4$ donc son terme général est

$$\forall n \geqslant 0 \; ; \; v_n = v_0 \times (q)^{n-0}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \geqslant 0 \; ; \; v_n = 4 \times (0{,}7)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$v_n = -u_n + 6$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = -v_n + 6$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0 \; ; \; u_n = -4 \times (0{,}7)^n + 6}$$

4. c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg. Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Corrigé

On cherche le plus petit n entier tel que $u_n \geqslant 5,5$ soit :

$$\begin{aligned} u_n \geqslant 5,5 &\iff -4 \times 0,7^n + 6 \geqslant 5,5 \\ &\iff -4 \times 0,7^n \geqslant -0,5 \\ &\iff 0,7^n \leqslant \frac{0,5}{4} = 0,125 \end{aligned}$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\begin{aligned} &\iff \ln 0,7^n \leqslant \ln 0,125 \\ &\iff n \ln 0,7 \leqslant \ln 0,125 \end{aligned}$$

On divise par $\ln 0,7 < 0$, l'ordre change

$$\iff n \geqslant \frac{\ln 0,125}{\ln 0,7} \approx 5,83$$

Donc le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole est de 6.

©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Thème : géométrie dans l'espace 7 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1\,;\,1\,;\,3)$,
- la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 2-t, \quad t\in\mathbb{R}. \\ z &=& 2+2t \end{array}\right.$

1.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.

Corrigé

Une représentation paramétrique de La droite $\mathcal{D}$ est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 2-t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z &=& 2+2t \end{array}\right.$$

Donc les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$ sont : $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}$.

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

1. b. Montrer que le point $B(-1\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

Corrigé

Si $t=-1$ alors $x=-1$, $y=3$ et $z=0$ donc $B(-1;3;0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

1. c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}$.

Corrigé

$$\begin{cases} A(-1\,;\,1\,;\,3) \\ B(-1\,;\,3\,;\,0) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}.\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = 0-2-6=-8}$$

2. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.

2. a. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

Corrigé

Propriété 1

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a\left(x - x_A\right) + b\left(y - y_A\right) + c\left(z - z_A\right) = 0$$

$\vec{u}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ et le plan passe par $A(-1\,;\,1\,;\,3)$.
Donc d'après la propriété 1 :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$
$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathcal{P} \iff 2(x+1) - (y-1) + 2(z-3) = 0$$
$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathcal{P} \iff 2x + 2 - y + 1 + 2z - 6 = 0$$

$$\boxed{\mathcal{P} \;:\; 2x - y + 2z - 3 = 0}$$

2. b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9}\,;\,\dfrac{19}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$.

Corrigé

- Le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x-y+2z-3 = 0$ et les coordonnées du point $H\left(\dfrac{7}{9}\,;\,\dfrac{19}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$ vérifient bien cette équation :

$$2 \times \frac{7}{9} - \frac{19}{9} + 2 \times \frac{16}{9} - 3 = \frac{27}{9} - 3 = 0$$

Le point de coordonnées $H\left(\dfrac{7}{9}\,;\,\dfrac{19}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$ appartient à $\mathscr{P}$.

- On a :

$$1 + 2t = \frac{7}{9} \iff 2t = \frac{-2}{9} \iff t = \frac{-1}{9}$$

En prenant $t = -\dfrac{1}{9}$ dans l'équation de $\mathscr{D}$ on obtient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{9} \\ y = \dfrac{19}{9} \\ z = \dfrac{16}{9} \end{cases}$$

Donc le point $H\left(\dfrac{7}{9}\,;\,\dfrac{19}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$ appartient à $\mathscr{D}$.

- De ce fait H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

2. c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

Corrigé

$$\begin{cases} A(-1\ ;\ 1\ ;\ 3) \\ H\left(\frac{7}{9}\ ;\ \frac{19}{9}\ ;\ \frac{16}{9}\right) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{AH}\left(\frac{16}{9}\ ;\ \frac{10}{9}\ ;\ -\frac{11}{9}\right)$$

Donc dans le repère orthonormé on a en unité de longueur :

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2+\left(\frac{10}{9}\right)^2+\left(\frac{-11}{9}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{477}{81}} \end{aligned}$$

$$\boxed{AH = \frac{\sqrt{53}}{3}}$$

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$, par une autre méthode.

On rappelle que le point B$(-1\ ;\ 3\ ;\ 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ et que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

3. a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{\text{HB}} = k\overrightarrow{u}$.

Corrigé

La droite (HB) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ dont $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal, donc $\overrightarrow{HB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

3. b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{u}}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2}$.

Corrigé

On rappelle que H est le projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$ dont $\vec{u}$ est un vecteur directeur. De ce fait $(AH) \perp \vec{u}$.

On a d'après la relation de Chasles et par distributivité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}.\vec{u} &= \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right).\vec{u} \\ &= \overrightarrow{AH}.\vec{u}+\overrightarrow{HB}.\vec{u} \end{aligned}$$

or $(AH) \perp \vec{u}$ donc $\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$ et d'après ce qui précède $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}.\vec{u} &= 0 + k\vec{u}.\vec{u} \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u} &= k\left\|\vec{u}\right\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi puisque $\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 \neq 0$:

$$\boxed{k = \frac{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{u}}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2}}$$

3. c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

Corrigé

On a :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \Longrightarrow \|\vec{u}\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 9$$

Ainsi

$$\begin{cases} \|\vec{u}\|^2 = 9 \\ k = \dfrac{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{u}}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2} \\ \overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{u} = -8 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{k = -\frac{8}{9}}$$

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\dfrac{8}{9}$.

Calculer l'aire du triangle ACH.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Corrigé

- Soit

$$\begin{cases} H(x\ ;\ y\ ;\ z) \\ B(-1\ ;\ 3\ ;\ 0) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-1-x\\3-x\\-z\end{pmatrix}$$

- On a montré que $\overrightarrow{\text{HB}} = k\overrightarrow{u}$ et que $k = -8/9$ donc :

$$\overrightarrow{HB} = -\frac{8}{9}\vec{u} \iff \begin{cases} 1 - x = -\dfrac{8}{9} \times 2 \\ 3 - y = -\dfrac{8}{9} \times (-1) \\ -z = -\dfrac{8}{9} \times 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{7}{9} \\ y = \dfrac{19}{9} \\ z = \dfrac{16}{9} \end{cases}$$

On retrouve donc les coordonnées du point H trouvées à la question 2.b.

$$\overrightarrow{BH}\left(\frac{16}{9}; \frac{-8}{9}; \frac{16}{9}\right)$$

- Donc

$$BH = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2} = \frac{8}{3}$$

On appelle $\mathscr{B}$ l'aire du triangle ACH.

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times BH \times \mathscr{B} \iff \frac{8}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{8}{3} \times \mathscr{B} \iff \boxed{\mathscr{B} = 1}$$

L'aire du triangle ACH vaut 1 unité d'aire.

Exercice 3. Thème : probabilités — 7 points

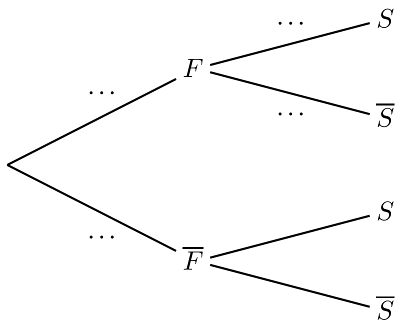
Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel. Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

1. Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.

On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les évènements :

- F : « le salarié interrogé est une femme »,
- S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

$\overline{F}$ et $\overline{S}$ désignent respectivement les évènements contraires des évènements F et S.



1. a. Donner la probabilité de l'évènement S.

Corrigé

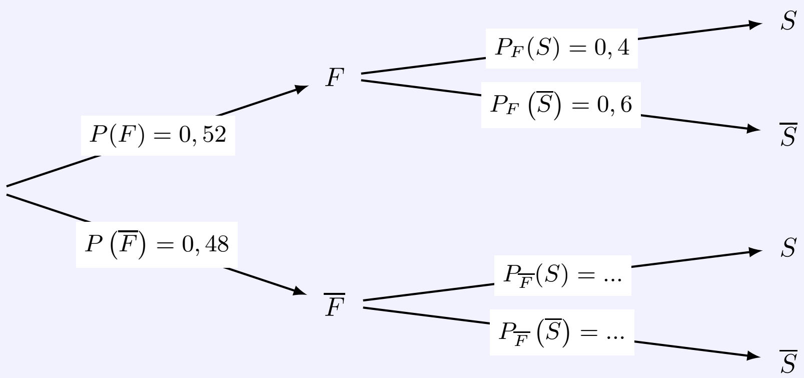
S est l'évènement « le salarié interrogé a suivi le stage »et on sait que ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

De ce fait $\boxed{P(S) = 0,25}$.

1. b. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.

Corrigé

Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes donc $P(F) = 0,52$, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage soit $P_F(S) = 0,4$.



1. c. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à $0,208$.

Corrigé

On cherche :

$$\begin{aligned} P(F \cap S) &= P(F) \times P_F(S) \\ &= 0,52 \times 0,4 \\ \boxed{P(F \cap S) = 0,208} \end{aligned}$$

La probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à $0,208$.

1. d. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

Corrigé

On veut calculer :

$$\begin{aligned} P_F(S) &= \frac{P(S \cap F)}{P(S)} \\ &= \frac{0,208}{0,25} \\ \boxed{P_F(S) = 0,832} \end{aligned}$$

La probabilité que la personne interrogée soit une femme sachant qu'elle a suivi le stage est égale à $0,832$.

1. e. Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de $10\,\%$ ont suivi le stage.
Justifier l'affirmation du directeur.

Corrigé

Les évènements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totale :

$$\begin{aligned} P(S) = P(S \cap F) + P\left(S \cap \overline{F}\right) &\iff P\left(S \cap \overline{F}\right) = P(S) - P(S \cap F) \\ &\iff P\left(S \cap \overline{F}\right) = 0,25 - 0,208 \\ &\iff P\left(S \cap \overline{F}\right) = 0,042 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} P_F(S) &= \frac{P\left(S \cap \overline{F}\right)}{P\left(\overline{F}\right)} \\ &= \frac{0,042}{0,48} \\ \boxed{P_F(S) = 0,0875 < 0,1} \end{aligned}$$

L'affirmation du directeur est donc exacte.

2. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

2. a. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.

Corrigé

Il y a répétition de $n = 20$ événements indépendants et identiques (on tire un salariéau hasard).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0,25$ quand un salarié a fait un un stage ;
- et échec de probabilité $1 - p = 0{,}75$ sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 20$ épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre $p = 0,25$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$. On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathcal{B}\left(20\ ;\ 0,25\right) \text{ ou } X \sim \mathcal{B}\left(20\ ;\ 0,25\right).$$

2. b. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

Corrigé

Puisque $X \sim \mathcal{B}\left(20\ ;\ 0,25\right)$:

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,25^5 \times (1 - 0,25)^{10-5}$$
$$\boxed{P(X = 5) \approx 0,202}$$

La probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage est environ égale à $0,202$.

2. c. Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$ créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

```python
# Dans l'éditeur Python
def proba(k):
        P=0
        for i in range(0,k+1) :
                P=P+binomiale(i,20,0.25)
        return P
```

Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Ce programme calcule $P(X \leqslant k)$.
La calculatrice donne $P(X \leqslant 5) \approx 0,617$.
Le programme renvoie donc, à 10^{-3} près, $0,617$.

2. d. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

Corrigé

On veut calculer :

$$P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5)$$

$$\boxed{P(X \geqslant 6) \approx 0,383}$$

3. Cette question est indépendante des questions 1 et 2.

Pour inciter les salariés à suivre le stage, l'entreprise avait décidé d'augmenter les salaires des salariés ayant suivi le stage de 5 %, contre 2 % d'augmentation pour les salariés n'ayant pas suivi le stage.

Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise dans ces conditions ?

Corrigé

L'entreprise avait décidé d'augmenter les salaires des 25% de salariés ayant suivi le stage de 5 %, contre 2 % d'augmentation pour les 75% autres salariés.

Effectuer une augmentation de 5 %, c'est multiplier par $1 + 5\% = 1,05$, on a donc en notant X le nombre total d'employé :

$$1,05 \times 0,25 \times X + 1,02 \times 0,75 \times X = 1,0275X = (1 + 2,75\%)X$$

Le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise est donc de $2,75\%$.

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Thème : QCM fonctions numériques — 7 points

1. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

a. $x=-2$;
b. $y=-1$;
c. $y=-2$;
d. $y=0$

Corrigé (réponse c)

On va calculer la limite en $+\infty$ et pour cela on factorise par le terme de plus haut degré.
Pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2\left(-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$$

Donc par somme de limites et quotient :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2}$$

La courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote la droite d'équation : $y=-2$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\mathrm{e}^{x^2}$.
La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0)=1$ est définie par :

a. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{x^2}$;
b. $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$
c. $F(x)=\left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$;
d. $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+\dfrac{1}{2}$

Corrigé (Réponse D)

Une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

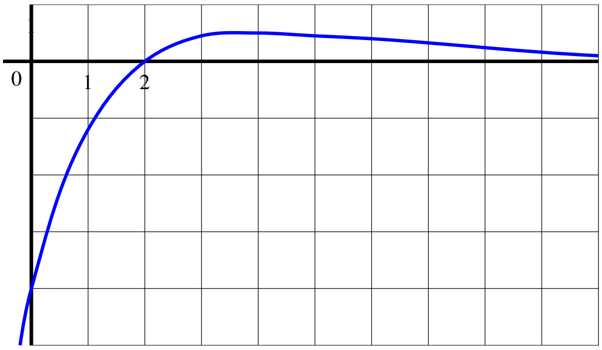
$$F(x)=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\,x^2}+K$$

et

$$F(0)=1 \iff \frac{1}{2}+K=1 \iff K=\frac{1}{2}$$

3.

On donne ci-contre la représentation graphique $\mathcal{C}_{f'}$ de **la fonction dérivée f'** d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
On peut affirmer que la fonction f est :
a. concave sur $]0\ ;\ +\infty[$;
b. convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$;
c. convexe sur $[0\,;\,2]$;
d. convexe sur $[2\ ;\ +\infty[$.



Corrigé (Réponse C)

f' semble être strictement croissante sur $[0\ ;\ 4]$ et strictement décroissante sur $[4 ; +\infty[$.
Donc f est convexe sur $[0\ ;\ 2]$.

4. Parmi les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^{-x^2} + 2$:

a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$;
b. toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$;
c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$;
d. toutes sont croissantes sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissantes sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Corrigé (Réponse A)

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, pour tout réel x, $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
or si F désigne une primitive de f, on a :

$$F' = f > 0$$

De ce fait F est croissante et de ce fait toutes les primitives de f sont croissantes sur $\mathbb{R}$.

5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{3x^2+1}$ est égale à :

a. $\dfrac{2}{3}$;
b. $+\infty$;
c. $-\infty$
d. 0

Corrigé (Réponse D)

On a pour $x > 0$:

$$f(x) = \frac{2\ln x}{3x^2+1} = \frac{\dfrac{2\ln x}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x^2}}$$

Or d'après les croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x^2} = 0$$

Donc par quotient :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x^2} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3+\frac{1}{x^2} = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

6. L'équation $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. trois solutions ; **b.** deux solutions ; **c.** une seule solution ; **d.** aucune solution.

Corrigé (Réponse C)

L'équation peut s'écrire :

$$\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2 + \mathrm{e}^{x} - 12 = 0 \iff \begin{cases} X = \mathrm{e}^{x} \\ X^2 + X - 12 = 0 \end{cases}$$

L'équation polynôme du second degré $X^2 + X - 12 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 49 > 0$
Ses racines sont donc $X_1 = -4$ et $X_2 = 3$.
Or $\mathrm{e}^{x} = -4$ n'admet pas de solution et $\mathrm{e}^{x} = 3$ admet une unique solution $x = \ln(3)$.

Fin du devoir