∽ Corrigé du Baccalauréat Polynésie 5 mai 2022 ∾
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ sujet n° 2

EXERCICE 1

1. **Réponse a.**

   En effet, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout x réel strictement positif, on a :

   $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) + \dfrac{x}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$

2. **Réponse c.** On a $f(x) = x^2 - x^2\ln(x)$.

   - On a $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$;
   - On sait (croissances comparées) que $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$;

   Donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

3. **Réponse d.**

   Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\left(x^2 - 0,9x - 0,1\right)$.

   On a donc $f(x) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ x^2 - 0,9x - 0,1 & = & 0 \end{array}\right.$

   0 est donc une solution et pour l'équation du second degré le nombre 1 est une racine évidente ; le produit des racines étant égal à $-0,1$ l'autre racine est donc $-0,1$.

   L'équation $f(x) = 0$ a donc trois solutions : $-0,1$; 0 et 1.

4. **Réponse c.**

   On dérive la proposition, en pensant bien à utiliser la formule pour dériver une fonction composée ($x \longmapsto H(2x)$ a pour dérivée $x \longmapsto 2H'(2x)$) et on vérifie.

   Si $K_{\mathbf{c}} : x \longmapsto \dfrac{1}{2}H(2x)$, alors,

   $\forall x \in \mathbb{R}, K_{\mathbf{c}}'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2H'(2x) = H'(2x) = h(2x)$, car H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$

   et donc on a : $\forall x \in \mathbb{R}, K_{\mathbf{c}}'(x) = k(x)$.

   On en déduit donc que $K_{\mathbf{c}}$ est une primitive de k sur $\mathbb{R}$.

5. **Réponse b.**

   Dérivons la fonction f, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions dérivables sur cet ensemble.

   $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x = (1 + x)\mathrm{e}^x$.

   On a donc $f'(1) = (1 + 1)\mathrm{e}^1 = 2\mathrm{e}$.

   Par ailleurs $f(1) = 1 \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

L'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est donc :

$$\begin{aligned}y &= f'(1)(x-1)+f(1)\\ &= 2\mathrm{e}(x-1)+\mathrm{e}\\ &= 2\mathrm{e}x+2\mathrm{e}-\mathrm{e}\\ y &= 2\mathrm{e}x-\mathrm{e}\end{aligned}$$

6. **Réponse d.**

   Résolvons cette inéquation :

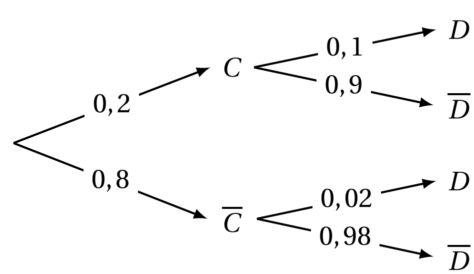
   $$\begin{aligned}(0,2)^n < 0,001 &\iff \ln\left(0,2^n\right) < \ln(0,001) \qquad \text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}\\ &\iff n\ln(0,02) < \ln(0,001)\\ &\iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \qquad \text{car } \ln(0,2) < 0\end{aligned}$$

   On a $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \approx 4,3$, donc les solutions à cette inéquation sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 5.

EXERCICE 2

Partie 1

Puisque la commande est faite au hasard, on assimile les proportions à des probabilités. On en déduit l'arbre pondéré suivant :



1. $\mathrm{P}(C\cap D) = \mathrm{P}(C)\times \mathrm{P}_C(D) = 0,2\times 0,1 = 0,02.$

   La probabilité d'avoir un casque contrefait présentant un défaut est donc de 0,02.

2. Les événements C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on en déduit :

   $$\begin{aligned}\mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(C\cap D)+\mathrm{P}\left(C\cap\overline{D}\right)\\ &= 0,02+0,8\times 0,02\\ &= 1,8\times 0,02\\ &= 0,036\end{aligned}$$

   La probabilité de commander un casque présentant un défaut de conception est donc de 0,036.

3. On demande ici de calculer la probabilité conditionnelle : $P_D(C)$

$P_D(C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,02}{0,036} = \dfrac{5}{9} \approx 0,556$ à 10^{-3} près.

Partie 2

1. **a.**
- On a une expérience aléatoire de base (on commande un casque), pour laquelle on considère deux issues. Pour cette épreuve de Bernoulli, le succès (le casque présente un défaut) a une probabilité $p = 0,036$. (d'après la question **2.** de la **partie 1**) ;
- On répète cette expérience $n = 35$ fois, de façon indépendante (puisque la répétition est assimilable à un tirage **avec** remise) ;
- La variable aléatoire X compte le nombre de succès sur les 35 répétitions.

Ces éléments permettent de confirmer que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(35\ ;\ 0,036)$

b. On veut calculer $P(X = 1)$.

$P(X = 1) = \dbinom{35}{1} \times 0,036^1 \times (1 - 0,036)^{35-1} = 35 \times 0,036 \times 0,964^{34} \approx 0,362$ à 10^{-3} près.

c. Calculons : $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0,639$ à 10^{-3} près (à la calculatrice).

2. Ici, pour tout entier n naturel non nul, on peut créer une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;\ 0,036)$.

Pour n un entier naturel non nul, la probabilité qu'un casque au moins présente un défaut sur n casques commandés est donc :

$P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \dbinom{n}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^n = 1 - 0,964^n$.

On résout donc sur $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
P(X_n \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,964^n \geqslant 0,99\\
&\iff -0,964^n \geqslant -0,01\\
&\iff 0,964^n \leqslant 0,01\\
&\iff \ln(0,964^n) \leqslant \ln(0,01) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+}\\
&\iff n\ln(0,964) \leqslant \ln(0,01)\\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \quad \text{car} \ln(0,964) < 0
\end{aligned}$$

or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \approx 125,6$, donc les solutions sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 126.

Il faut donc commander au moins 126 casques pour que la probabilité d'en avoir au moins un défectueux soit supérieure à 0,99.

EXERCICE 3

1. L'année 2022 est l'année 2021 + 1, donc on doit calculer u_1.

$u_1 = 0,008u_0(200 - u_0) = 0,008 \times 40 \times 160 = 51,2$.

L'estimation est donc de 51,2 oiseaux (arrondie à 51 animaux).

2. Résolvons $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0,008x(200 - x) = x \\ &\iff 1,6x - 0,008x^2 = x \\ &\iff 0,008x^2 - 0,6x = 0 \\ &\iff x(0,008x - 0,6) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 0,008x - 0,6 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0,6}{0,008} = 75 \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions dans $[0\,;\,100]$: 0 et 75.

3. **a.** Pour tout x entre 0 et 100, on a : $f(x) = -0,008x^2 + 1,6x$. C'est une fonction polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est négatif $(-0,008)$.

Le sommet de la parabole représentant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ a pour abscisse : $\dfrac{-1,6}{2 \times (-0,008)} = 100$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ serait donc croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,100]$ et décroissante sur $[100\,;\,+\infty[$, donc f, qui est définie sur $[0\,;\,100]$ est bien strictement croissante sur $[0\,;\,100]$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose P_n la propriété : « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$ ».

- Initialisation : On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51,2$, donc on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 100$ donc la propriété P_0 est vraie.
- Hérédité : Soit n un entier naturel . On suppose P_n vraie.

$$\begin{aligned} P_n &\implies 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100 \\ &\implies f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(100) \quad f \text{ est croissante sur } [0\,;\,100] \\ &\implies 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 80 \quad \text{car } f(0) = 0;\ f(100) = 80 \\ &\implies 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 100 \\ &\implies P_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est héréditaire.
- Conclusion : La propriété P_0 est vraie, et pour un naturel n quelconque, si P_n est vraie, P_{n+1} l'est aussi donc, d'après l'axiome du raisonnement par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N};\quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$

On en déduit donc que la suite est bornée par 0 et 100, et qu'elle est croissante.

c. La suite est croissante et majorée par 100, donc elle converge vers une limite ℓ, qui est supérieure à $u_0 = 40$ et inférieure au majorant 100.

d. Puisque la suite est convergente et définie par récurrence et que la fonction de récurrence f est continue sur $[0\,;\,100]$, intervalle contenant la limite ℓ, d'après le théorème du point fixe, ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Comme on a établi que cette équation n'a que deux solutions dans $[0\ ;\ 100]$, 0 et 75, et que l'on a établi que ℓ est comprise entre 40 et 100, il vient que $\ell = 75$.
La suite converge donc vers 75.

4. Le principe de cette fonction `seuil(p)` est de renvoyer l'année où l'estimation dépasse le seuil `p`, notre suite ici est croissante et converge vers 75, donc elle est majorée par 75. Aucun terme ne dépassera donc 75, et le test de la boucle `while` sera toujours satisfait, donc on aura une fonction qui tourne de façon infinie et ne renvoie donc aucun résultat.

EXERCICE 4

Partie A

1. On a les coordonnées suivantes : A $(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ (origine du repère), B $(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et G $(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

2. Les points A, I et G ne sont pas alignés, donc $\overrightarrow{\text{AI}}$ et $\overrightarrow{\text{AG}}$ sont deux vecteurs formant une base de (AIG).

On a les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{\text{AI}}\begin{pmatrix}0,5\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{AG}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BK}}\begin{pmatrix}-1\\0,5\\0,5\end{pmatrix}$.

Le repère est orthonormé (car ABCDEFGH est un cube d'arête 1), donc on calcule les produits scalaires avec les coordonnées :

$\overrightarrow{\text{BK}}\cdot\overrightarrow{\text{AI}} = -1\times 0,5 + 0,5\times 0 + 0,5\times 1 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{\text{BK}}$ et $\overrightarrow{\text{AI}}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{\text{BK}}\cdot\overrightarrow{\text{AG}} = -1\times 1 + 0,5\times 1 + 0,5\times 1 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{\text{BK}}$ et $\overrightarrow{\text{AG}}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{\text{BK}}$ étant orthogonal à deux vecteurs formant une base de (AIG), on en déduit que la droite (BK) est bien orthogonale à (AIG).

3. Puisque (BK) est orthogonale à (AIG), alors un vecteur directeur de (BK) est un vecteur normal à (AIG), notamment, $\overrightarrow{n} = -2\overrightarrow{\text{BK}}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à (AIG). Ce plan a donc une équation de la forme : $\quad 2x - y - z + d = 0$.

Comme A $(0\ ;\ 0\ ;\ 0) \in$(AIG), on en déduit que d est tel que :

$$\begin{aligned} 2x_{\text{A}} - y_{\text{A}} - z_{\text{A}} + d = 0 &\iff 2\times 0 - 0 - 0 + d = 0\\ &\iff d = 0 \end{aligned}$$

Finalement, une équation du plan (AIG) est donc bien $2x - y - z = 0$.

4. La droite (BK) est dirigée par $\overrightarrow{\text{BK}}\begin{pmatrix}-1\\0,5\\0,5\end{pmatrix}$ et passe par B $(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, donc elle admet pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t\\ y = 0 + 0,5t\\ z = 0 + 0,5t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1 - t\\ y &=& 0,5t\\ z &=& 0,5t\end{array}\right.\quad t \in \mathbb{R}$.

5. Le point L dont on donne les coordonnées est clairement le point de paramètre $\dfrac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique établie à la question précédente, donc L $\in$ (BK).

Vérifions si L est un point du plan (AIG) : $2x_{\text{L}} - y_{\text{L}} - z_{\text{L}} = 2 \times \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} = 0$.

Les coordonnées de L vérifient l'équation du plan : L $\in$ (AIG).

L est donc le point d'intersection de la droite (BK) et du plan (AIG) (qui sont sécants, puisque perpendiculaires), et donc L est le projeté orthogonal de B sur le plan (AIG).

6. La distance de B à (AIG) est donc la distance (BL), et comme le repère est orthonormé :

$$\text{BL} = \sqrt{(x_{\text{L}} - x_{\text{B}})^2 + \left(y_{\text{L}} - y_{\text{B}}\right)^2 + (z_{\text{L}} - z_{\text{B}})^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+1+1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Partie B

1. **a.** Dans le tétraèdre ABIG, si on considère AIB comme base, alors cette base est incluse dans le plan (AIB), qui contient la face avant du cube (la face ABFE), et donc l'arête [GF] est bien perpendiculaire à ce plan, puisque ABCDEFGH est un cube.

b. Le tétraèdre ABIG a donc pour volume $V_{\text{ABIG}} = \dfrac{1}{3} \times b_{\text{ABI}} \times h_{\text{GF}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1 \times 1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{6}$.

(Le triangle ABI a une base [AB] de longueur 1 et la hauteur correspondante, issue de I est de même longueur que [AE], donc de longueur 1 aussi).

2. Dans le triangle isocèle AIG, la hauteur principale issue de I est donc aussi une médiane, et elle passe donc par le milieu de la base principale [AG], c'est à dire par le point O.

On détermine la distance IO : $\text{IO} = \sqrt{0^2 + 0,5^2 + (-0,5)^2} = \sqrt{0,5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

L'aire du triangle est donc $\mathcal{A}_{\text{AIG}} = \dfrac{\text{AG} \times \text{OI}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

3. Le tétraèdre AIBG dont on a déjà calculé le volume peut aussi être vu comme ayant pour base le triangle AGI et comme hauteur correspondante, la hauteur issue de B, donc la longueur h est la distance séparant B du plan (AGI).

On a donc : $V_{\text{ABIG}} = \dfrac{1}{6} \iff \dfrac{1}{3} \times A_{\text{AIG}} \times h = \dfrac{1}{6}$

$$\begin{aligned}
&\iff h = \frac{3}{A_{\text{AIG}} \times 6}\\
&\iff h = \frac{1}{2A_{\text{AIG}}}\\
&\iff h = \frac{1}{2 \times \dfrac{\sqrt{6}}{4}}\\
&\iff h = \frac{2}{\sqrt{6}}\\
&\iff h = \frac{2\sqrt{6}}{6}\\
&\iff h = \frac{\sqrt{6}}{3}
\end{aligned}$$

On retrouve bien une distance de B au plan (AIG) qui est $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.