NOM : ………………………………………………………

PRENOM : …………………………………………………

NUMERO PARCOURSUP : ……………………………

EPREUVE DE MATHEMATIQUES SUJET B

Qui peut utiliser ce sujet de **Mathématiques B** ?

- Profil Violet **NON** ❌
- Profil Jaune **OUI** ✅
- Profil Vert **NON** ❌

DUREE : 1h30
Coefficient 6

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lisez attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.

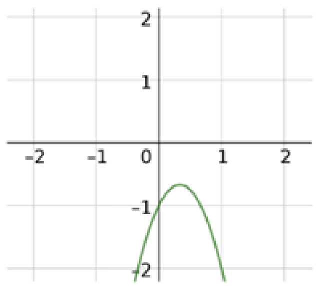
Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.
L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique (connecté ou non) est interdit.
Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

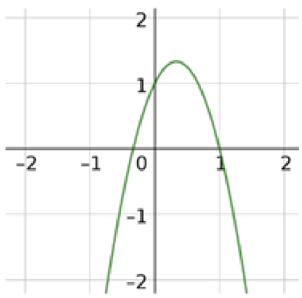
Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.
Si vous trouvez ce sujet "difficile", ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e).
Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

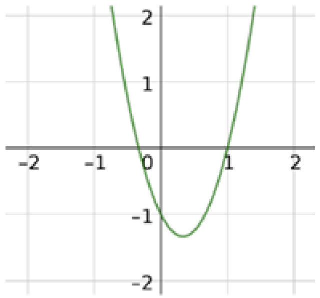
Barème :
Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points, tandis que chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'1 point. Une question non traitée n'apporte ni ne retire aucun point.

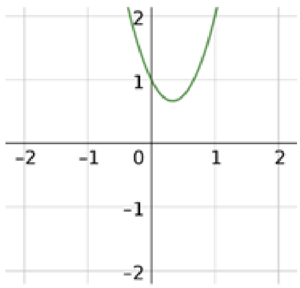
Équations, fonctions polynômes du second degré

Question 1.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Sa courbe représentative est :

a. 

b. 

c. 

d. 

Question 2.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$ est positive sur :

a. $\mathbb{R}$

b. $]-\infty - 1] \cup [1; +\infty[$

c. $[1; 2]$

d. $]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$

Question 3.
Pour quelle(s) valeur(s) de m, l'équation $x^2 + mx + m = 0$ admet-elle une unique solution ?

a. $m = 2$

b. $m = -2$

c. $m = 0$ ou $m = 4$

d. Aucune des réponses précédentes

Question 4.
La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 7(x-2)(x+1)$ admet un extremum atteint pour la valeur :

a. $x = 0$

b. $x = -\dfrac{3}{2}$

c. $x = \dfrac{3}{2}$

d. $x = \dfrac{1}{2}$

Suites numériques, modèles discrets

Question 5.
La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 par $u_n = \dfrac{n+1}{n-1}$ est :

a. décroissante

b. croissante

c. constante

d. stationnaire

Question 6.
La somme $\sum_{k=1}^{100} 2k = 2+4+6+\cdots+200$ **est égale à :**

a. 5050
b. 10100
c. $\dfrac{101 \times (200+2)}{2}$
d. $2 \times (2^{100} - 1)$

Question 7.
On place une somme d'argent initiale de 200 euros sur un compte épargne bloqué qui rapporte 1,5% d'intérêts par an et on définit la suite (u_n) **par** $u_0 = 200$ **et pour tout entier naturel** n**,** u_n **représente la somme d'argent sur le compte après** n **années. On peut alors affirmer que :**

a. La suite (u_n) est arithmétique de raison $1,5$
b. La suite (u_n) est géométrique de raison $0,015$
c. La suite (u_n) est arithmétique de raison $0,015$
d. La suite (u_n) est géométrique de raison $1,015$

Question 8.
La proposition exacte est :

a. Toute suite strictement croissante diverge vers $+\infty$
b. Toute suite décroissante est majorée
c. Toute suite non monotone diverge
d. Toute suite géométrique de raison strictement négative diverge

Question 9.

Soit (u_n) **la suite définie pour tout entier naturel** n **par** $\begin{cases} u_0 = 500 \\ u_{n+1} = 1,3 \times u_n \end{cases}$**.**

```python
u = 500
N = 0
while u <= 1000 :
    u = u*1.3
    N = N+1
print(N)
```

Le programme ci-dessus, écrit en Python, affiche :

a. Le premier terme de la suite strictement supérieur à 1000
b. Le rang du premier terme de la suite strictement supérieur à 1000
c. La valeur de u_{1001}
d. Le rang du dernier terme de la suite inférieur ou égal à 1000

Question 10.
La suite (v_n) **définie sur** $\mathbb{N}$ **par** $v_n = -\sqrt{2} \times \left(\dfrac{\pi}{e}\right)^n$ **admet pour limite :**

a. 0
b. $+\infty$
c. $-\sqrt{2}$
d. $-\infty$

Question 11.
Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{n+2}{n+3} \quad \textbf{et} \quad v_n = \frac{u_n+2}{u_n-1}.$$

On peut alors affirmer que :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -2$

Question 12.
La population d'une espèce animale dans une réserve naturelle diminue chaque année de 10%. En contrepartie, les scientifiques introduisent chaque année 50 individus. Au début de l'expérience, la population compte 200 individus et on note pour tout entier naturel n, u_n le nombre d'individus l'année après n année(s). Ainsi $u_0 = 200$.
On peut alors affirmer que :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 500$

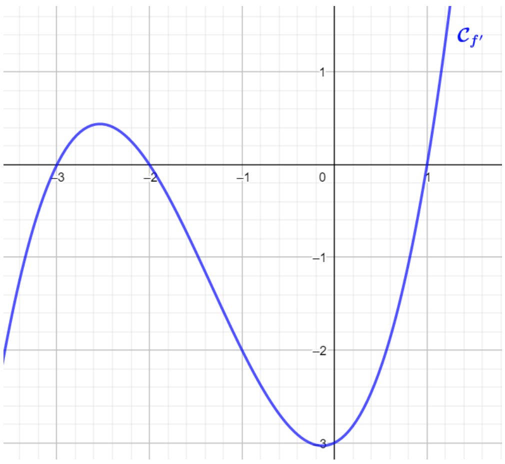
b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 50$

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 200 \times 0,9^n + 50n$

d. La suite (u_n) est strictement décroissante

Dérivation, variations et courbes représentatives des fonctions

Question 13.
Soit une fonction f. On a représenté ci-dessous la courbe de sa fonction dérivée f'.



Courbe représentative de f'

On peut alors affirmer que :

a. f est monotone sur $[0;+\infty[$

b. $f(0) < f(1)$

c. f est croissante sur $[-3;-2]$

d. f admet un extremum atteint pour $x = 0$

Question 14.
Soit f la fonction racine carrée. On appelle $\mathcal{D}$ l'ensemble sur lequel elle est dérivable et f' sa fonction dérivée. On peut alors affirmer que :

a. $\mathcal{D} = [0; +\infty[$

b. $f'(4) = \dfrac{1}{4}$

c. $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d. f' admet au moins un antécédent de 0

Question 15.
Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1-2x}{x^2}$. La fonction dérivée f' est définie par :

a. $f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^3}$

b. $f'(x) = \dfrac{-2x^2-2x}{x^4}$

c. $f'(x) = \dfrac{6x^2-2x}{x^4}$

d. $f'(x) = \dfrac{-6x-2}{x^3}$

Question 16.
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que f soit strictement croissante et g soit strictement décroissante. On considère la fonction $h = f \times g$. On peut alors affirmer que :

a. h est strictement croissante

b. h est constante

c. h est strictement décroissante

d. Sans autres informations, on ne peut rien conclure sur les variations de h

Question 17.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 2$. Son tableau de variations est :

a.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	

b.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	-2	$\searrow$	

c.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f		$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	

d.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Question 18.
Soit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' sa fonction dérivée. Parmi les propositions ci-dessous, laquelle est toujours vraie ?

a. Si f' s'annule en 0 alors f admet un minimum ou un maximum en 0

b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est finie

c. Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 0$

d. Si $f = f'$ alors f est la fonction exponentielle

Question 19.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 3x - \dfrac{2}{x^2}$. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 est :

a. $y = -x - 4$

b. $y = 7x - 6$

c. $y = -x - 6$

d. $y = 7x - 4$

Fonction exponentielle, fonctions trigonométriques

Question 20.
Les solutions dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ **de l'équation** $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **sont :**

a. $\dfrac{5\pi}{6}$ et $-\dfrac{5\pi}{6}$

b. $\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{7\pi}{6}$

c. $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$

d. $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$

Question 21.
L'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ **admet sur** $\mathbb{R}$ **:**

a. 0 solution

b. 2 solutions exactement

c. 1 solution exactement

d. Une infinité de solutions

Question 22.
Lequel de ces nombres est un entier naturel ?

a. $-\sqrt{3} \times \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

b. $\sqrt{2} \times \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

c. $-18 \times \sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

d. $\sqrt{3} \times \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Question 23.
Soit $x \in \mathbb{R}$**, l'expression suivante** $e \times \dfrac{e^{5x} \times e^{-9+x}}{(e^{3x-3})^2}$ **est égale à :**

a. e

b. e^{-4}

c. e^{-2}

d. e^{-15}

Calcul vectoriel et produit scalaire

Question 24.
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ **on considère le point** $A(-5; 2)$**. Une équation du cercle de centre** A **et de rayon** $R = \sqrt{2}$ **est donnée par :**

a. $(x+5)^2 - (y-2)^2 = 2$

b. $(x-5)^2 + (y+2)^2 = \sqrt{2}$

c. $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 2$

d. $(x+5)^2 - (y-2)^2 = \sqrt{2}$

Question 25.
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ **on considère les points** $A(3; 3)$**,** $B(1; 4)$**,** $C(1; 3)$ **et la droite** $\mathcal{D}$ **d'équation réduite** $y = 2x$**. On peut alors affirmer que :**

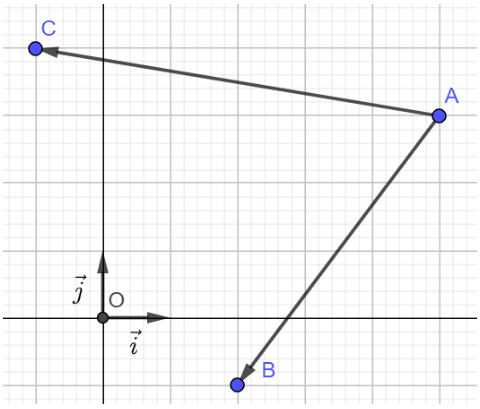
a. Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires

b. Les droites (BC) et $\mathcal{D}$ sont parallèles

c. Les droites (AC) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires

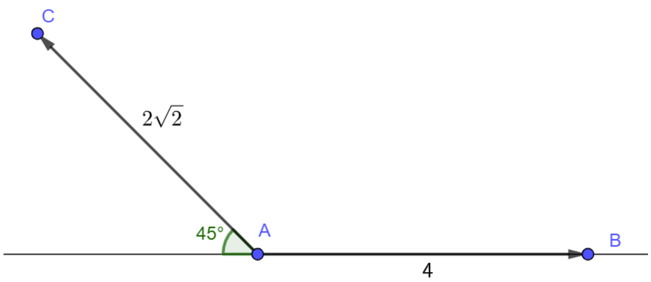
d. Les droites (AC) et $\mathcal{D}$ sont parallèles

Question 26.
Dans la figure suivante, le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est orthonormé. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est alors égal à :



a. -27 **b.** 22
c. -22 **d.** 14

Question 27.
À partir de la figure suivante, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à :



a. $4\sqrt{2}$ **b.** 8
c. -8 **d.** $-4\sqrt{2}$

Probabilités et statistiques

Question 28.
On interroge des individus au hasard avant qu'ils passent un concours et on s'intéresse à deux caractéristiques présentées dans le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Redoublant	Non redoublant
A révisé	80	70
N'a pas révisé	40	50

La probabilité que la personne interrogée soit non redoublante sachant qu'elle a révisé est :

a. $\frac{7}{8}$ **b.** $\frac{70}{120}$
c. $\frac{70}{240}$ **d.** $\frac{7}{15}$

Question 29.
Soient deux évènements A et B avec $P(A) = 0,6$ et $P(B) = x$. De plus, on a $P(A \cup B) = 0,8$. Pour quelle valeur de x, les évènements A et B sont-ils indépendants ?

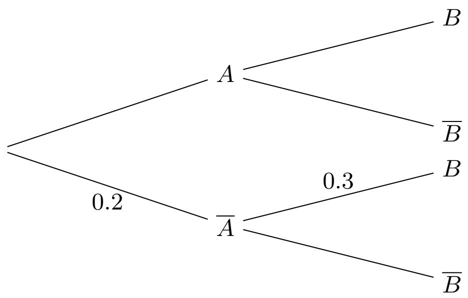
a. $x = 0,5$

b. $x = 0,2$

c. $x = 0,25$

d. $x = 0,75$

Question 30.
Soient deux évènements A et B avec $P_A(B) = 0,8$. À partir de l'arbre pondéré ci-dessous, on peut affirmer que :



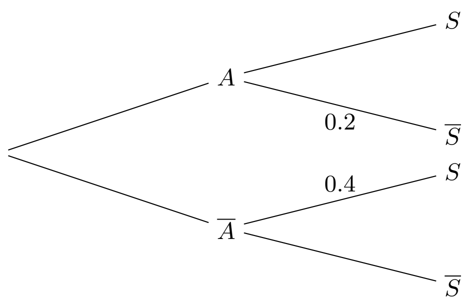
a. $P(\overline{A} \cap B) = 0,5$

b. $P(A \cap \overline{B}) = 0,16$

c. $P(B) = 0,64$

d. $P(\overline{A}) = P(\overline{B})$

Question 31.
Soient deux évènements A et S avec $P(S) = 0,68$. À partir de l'arbre pondéré ci-dessous, on peut affirmer que :



a. $P(A) = 0,7$

b. $P(A \cap \overline{S}) = 0,2$

c. $P(A) = 0,17$

d. $P(A) = 2 \times P(\overline{A})$

Question 32.
Dans une urne contenant douze jetons numérotés de 1 à 12, on prélève un jeton au hasard et on regarde son numéro. Si on tire un multiple de 3 on gagne 2 euros sinon on perd 1 euro. Soit X la variable aléatoire associée au gain algébrique d'espérance $E(X)$. On peut affirmer que :

a. $P(X = 2) = \dfrac{1}{4}$

b. Le jeu est profitable au joueur car $E(X) > 0$

c. $P(X = -1) = \dfrac{3}{4}$

d. Le jeu est équitable car $E(X) = 0$

Question 33.
Soient

- X **une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres** $n = 4$ **et** $p = \dfrac{1}{2}$ **;**
- Z **la variable aléatoire définie par** $Z = -3X + 1$**.**

On peut alors affirmer que la variance $V(Z) =$

a. -2

b. 9

c. -3

d. 10

Question 34.
Soit X **une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres** $n = 3$ **et** $p = \dfrac{1}{2}$ **:**
$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3;\ \dfrac{1}{2}\right)$**. La probabilité** $P(X \geq 1)$ **est alors égale à :**

a. $\dfrac{1}{8}$

b. $\dfrac{1}{4}$

c. $1 - \dfrac{1}{8}$

d. $1 - \dfrac{1}{4}$

Question 35.
On lance un dé à 6 faces, équilibré, jusqu'à l'obtention de la face 6. Soit la variable X **comptant le nombre de lancers nécessaires. On peut alors affirmer que :**

a. $P(X = 6) = \dfrac{1}{6}$

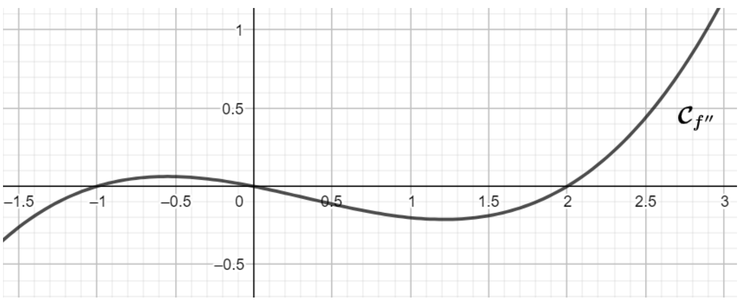
b. $P_{(X>5)}(X = 6) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^5 \times \dfrac{1}{6}$

c. $P(X = 6) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^6$

d. $P_{(X>5)}(X = 6) = \dfrac{1}{6}$

Convexité, limites de fonctions et fonction logarithme népérien

Question 36.
On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde f'' **d'une fonction** f **définie sur** $\mathbb{R}$**.**



Courbe représentative de f''

On peut alors affirmer que :

a. f est convexe sur $[0; 2]$

b. f est convexe sur $[0; +\infty[$

c. f est concave sur $[0; 2]$

d. f est concave sur $[0; +\infty[$

Question 37.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 6x^3$. On peut alors affirmer que :

a. f est concave sur $[-3; 0]$

b. f est concave sur $[0; +\infty[$

c. f est convexe sur $]-\infty; 0[$

d. f est convexe sur $]-3; +\infty[$

Question 38.
Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - x + 1$. On peut alors affirmer que :

a. f est croissante sur $[0; 1]$

b. f est majorée sur $]0; +\infty[$

c. f est convexe sur $]0; +\infty[$

d. f est concave sur $]0; +\infty[$

Question 39.
Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 5x + e^{-x} - \ln(x)$. On peut alors affirmer que :

a. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

b. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

c. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

d. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$

Question 40.
Pour toute fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$, on a :

a. Si f est strictement décroissante alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b. Si f est convexe sur $\mathbb{R}$ alors $f(1) - f(0) \geq f'(0)$

c. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$

d. Si $f''(0) = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ admet au moins un point d'inflexion

Question 41.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2)$. On peut alors affirmer que :

a. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$

b. $f'(x) = 2x\ln(x^2 + 2)$

c. $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$

d. $f'(x) = \ln(2x)$

Primitives et équations différentielles

Question 42.
La solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 1$ qui vérifie $f(1) = 1$ est :

a. $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-2} \times e^{-2x} - 1\right)$

b. $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-2x-2} + 1\right)$

c. $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-2x+2} + 1\right)$

d. $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-2x} - 1\right)$

Question 43.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' = y$ sont :

a. $f(x) = Ce^{2x}$, où $C \in \mathbb{R}$

b. $f(x) = Ce^{\frac{x}{2}}$, où $C \in \mathbb{R}$

c. $f(x) = Ce^{-2x}$, où $C \in \mathbb{R}$

d. $f(x) = Ce^{-\frac{x}{2}}$, où $C \in \mathbb{R}$

Question 44.
Une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - e^{-x} + 8$ est donnée par $F(x) =$

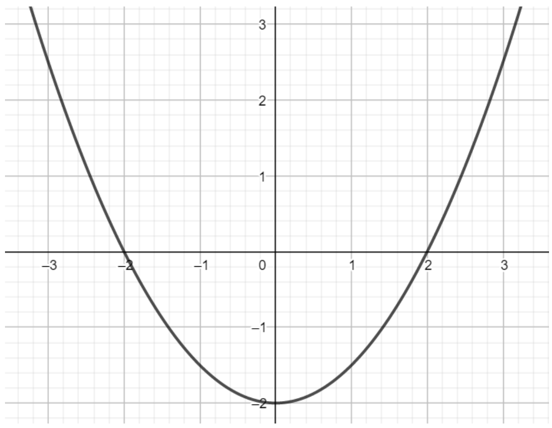
a. $x^3 + e^{-x} + 8x - 1$

b. $x^3 - e^{-x} + 8x + 1$

c. $6x + e^{-x}$

d. $x^3 + e^{-x} + 8$

Question 45.
On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.



Courbe représentative de f

On peut alors affirmer que :

a. F est monotone sur $]-\infty; 0]$

b. F change de variations sur $[-2; 2]$

c. F est croissante sur $[0; +\infty[$

d. F est décroissante sur $[0; 2]$

••• FIN •••

Ce sujet est la propriété intellectuelle exclusive du Concours Avenir. Il ne doit en aucun cas être emporté par les candidats à la fin de l'épreuve. Il doit être rendu à l'équipe surveillante en même temps que sa grille réponse associée.